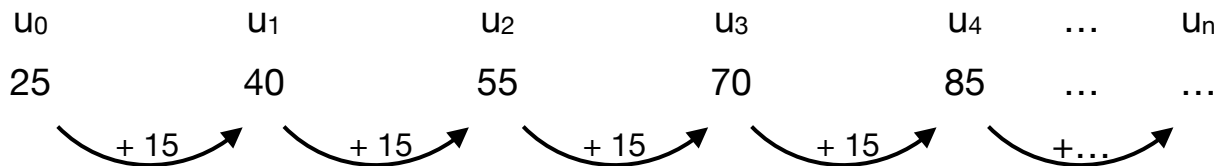


Exercice 7

Un jeu télévisé est organisé de la façon suivante : si le candidat donne une bonne réponse à la première question, il gagne 25€. Ensuite, chaque bonne réponse rapporte 15€ de plus que la précédente. Le jeu s'arrête à la première réponse fausse.

Quel est le nombre minimal de bonnes réponses que doit donner un candidat pour que le total de ses gains s'élève au moins à 1.000€ ?

Correctif



Si l'on veut calculer u_n :

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = 25 + n \cdot 15$$

Mais on ne peut résoudre une équation à 2 inconnues !

L'énoncé nous parle d'une somme. Calculons-là !

$$S = \frac{(n+1)}{2} \cdot (u_0 + u_n)$$

$$S = \frac{(n+1)}{2} \cdot (25 + u_n)$$

$$S = \frac{(n+1)}{2} \cdot (25 + 25 + 15n)$$

$$S = \frac{(n+1)}{2} \cdot (50 + 15n)$$

On met $\frac{1}{2}$ en évidence et on effectue la double distributivité.

$$S = \frac{1}{2} (50n + 15n^2 + 50 + 15n)$$

$$S = \frac{1}{2} (15n^2 + 65n + 50)$$

Par l'énoncé, la somme des gains doit être au moins de 1.000€. Donc :

$$\frac{1}{2} (15n^2 + 65n + 50) \geq 1000$$

Ou encore :

$$15n^2 + 65n + 50 \geq 2000$$

$$15n^2 + 65n + 50 - 2000 \geq 0$$

$$15n^2 + 65n - 1950 \geq 0$$

Recherchons d'abord les racines de la fonction :

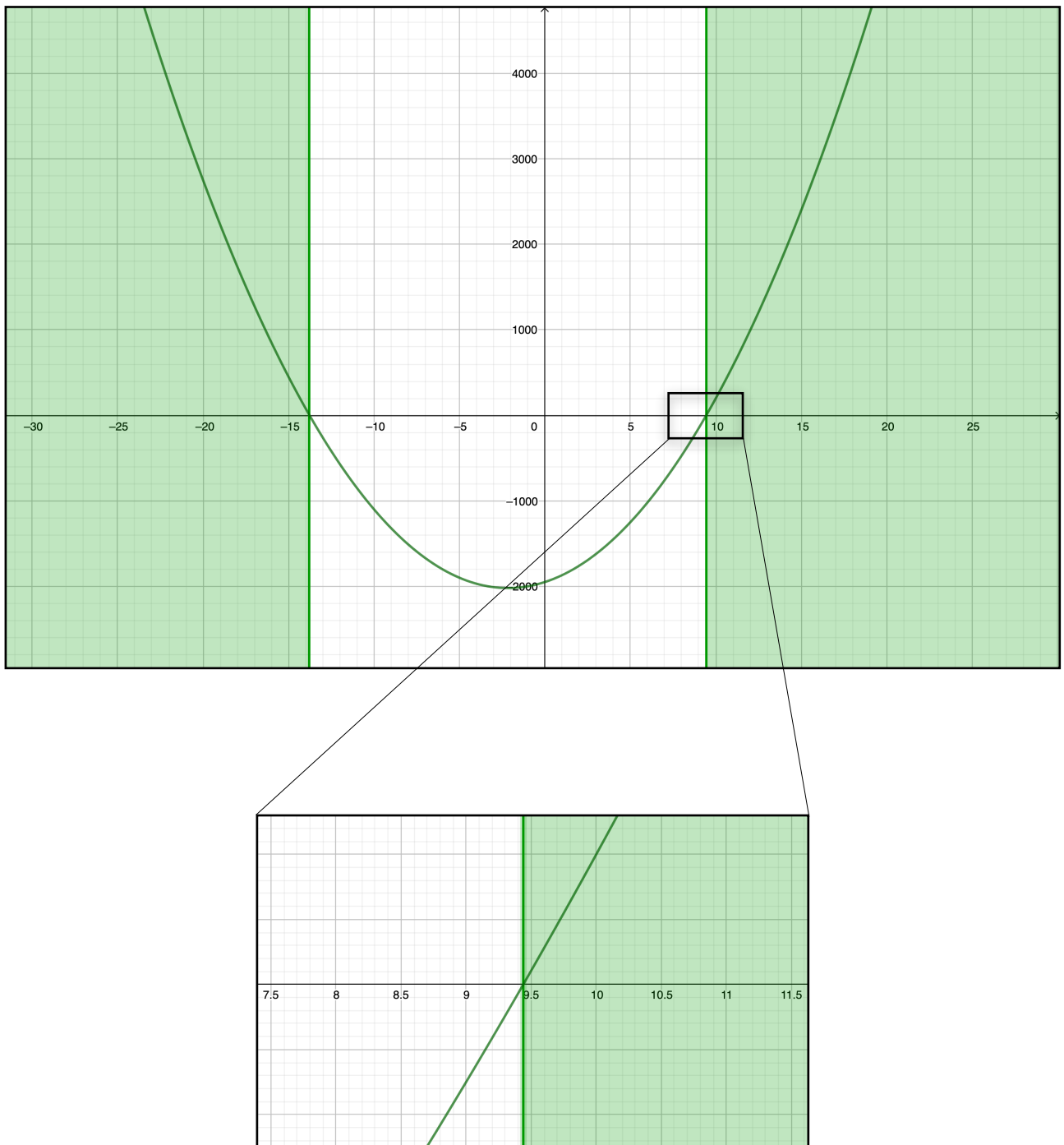
$$15n^2 + 65n - 1950 = 0$$

$$n = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-1950)}}{2 \cdot 15}$$

$$n = \frac{-65 \pm \sqrt{121225}}{30}$$

$$n = \begin{cases} 9,439... \\ -13,772... \end{cases}$$

Puisque l'indice n doit toujours être un nombre entier positif, on exclura la valeur négative et l'on prendra la valeur entière de 9,439... Mais que choisir ? La valeur de 9 ou celle de 10 ? Le graphe ci-dessous aide à prendre la décision en se souvenant que $15n^2 + 65n - 1950 \geq 0$.



Aussi bien le graphe que le calcul¹ nous montrent que c'est la valeur de 10 qui doit être prise.

Avec $n = 10$,

$$u_{10} = 25 + 10 \cdot 15 = 175$$

$$S = \frac{(10 + 1)}{2} \cdot (25 + 175) = 1100$$

Comme $n = 10$, cela signifie qu'il faut **11 bonnes réponses** minimum (ne pas oublier u_0) pour gagner au moins 1.000€.

Vérification rapide :

r=15	u ₀	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	u ₆	u ₇	u ₈	u ₉	u ₁₀
Valeur	25	40	55	70	85	100	115	130	145	160	175
Somme	25	65	120	190	275	375	490	620	765	925	1100

¹ Si $n = 9$, alors la somme des gains n'est que de 925€ : $S = \frac{(9 + 1)}{2} \cdot (25 + 160) = 925$.