

Guy DOTREMONT

Cours de mathématique

5^e TQ

2 périodes par semaine

2023 – 2024

UAA 1

Approche graphique d'une fonction

1.1 Qu'est-ce qu'un graphe ?

Dans de nombreux domaines, scientifiques ou non, la représentation graphique de données est importante, même s'il faut parfois s'en méfier. Elle permet la visualisation d'informations. Celles-ci peuvent être sous la forme de données collectées (comme l'évolution de la température de jour en jour) ou d'une fonction.

Le plus souvent, ces graphiques sont réalisés dans un système d'axes perpendiculaires et possèdent parfois des unités de longueur identiques sur chaque axe. Dans le cas où le graphe possède à la fois des axes perpendiculaires et des unités de longueur identiques sur chacun d'eux, on dit que les axes sont orthonormés. Il est parfois avantageux d'utiliser un tel système d'axes dans le cas, par exemple, de la détermination de mesures d'angles ou de longueurs.

Un graphe est donc la représentation de données. Celles-ci peuvent être issues d'une formule, de valeurs recueillies lors d'un process industriel ou encore lors d'un sondage.

Par convention, on place la variable indépendante sur l'axe horizontal des x (axe des abscisses) et la variable dépendante sur l'axe vertical des y (axe des ordonnées).

1.2 Que doit contenir un graphe ?

Pour réaliser un graphique, il faut :

- * Un plan ;
- * Des axes linéaires, perpendiculaires, orientés, (généralement) normés et nommés ;
- * Une origine, une échelle sur chaque axe et des points à placer sur le plan.

Chaque point possède des coordonnées notées dans l'ordre chronologique : $(x; y)$, x étant l'abscisse du point et y étant son ordonnée.

Les coordonnées x et y peuvent prendre des valeurs positives, nulles ou négatives.

Les coordonnées de l'origine du repère sont $(0; 0)$, ce qui signifie que tous les points de l'axe x ont une ordonnée nulle et que tous les points de l'axe y ont une abscisse nulle.

Si l'on a une fonction, par exemple $f(x) = -2x + 5$, x représente la variable indépendante. Dans ce cas, on doit déterminer les points à placer sur le graphique en calculant la coordonnée y d'une série de points au départ de l'équation $y = -2x + 5$. Une fois les points déterminés, on les place sur le graphique.

Si l'on relie tous ces points entre eux, on obtient la représentation graphique de la fonction.

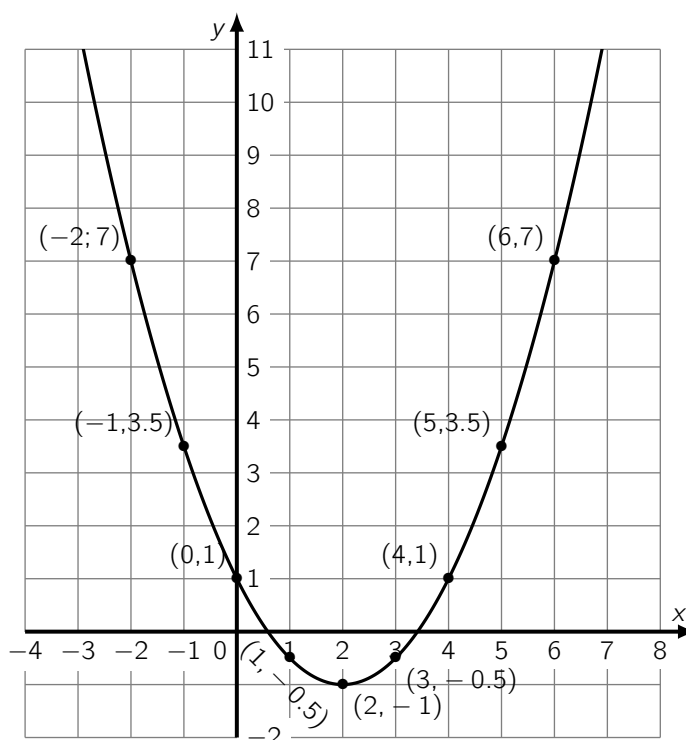
1.3 Prenons un exemple

Partons de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Nous allons choisir, nous-mêmes, différentes valeurs pour x et en calculer ensuite les valeurs de $f(x)$, c'est-à-dire y . Réalisons un tableau de valeurs.

x	$f(x)$ ou y	Point
-2	$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 + 1 = 7$	$\rightarrow (-2;7)$
-1	$f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 + 1 = 3,5$	$\rightarrow (-1;3,5)$
0	$f(0) = \frac{1}{2} \cdot (0)^2 - 2 \cdot (0) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 - 0 + 1 = 1$	$\rightarrow (0;1)$
1	$f(1) = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 - 2 \cdot (1) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 + 1 = -0,5$	$\rightarrow (1;-0,5)$
2	$f(2) = \frac{1}{2} \cdot (2)^2 - 2 \cdot (2) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 + 1 = -1$	$\rightarrow (2;-1)$
3	$f(3) = \frac{1}{2} \cdot (3)^2 - 2 \cdot (3) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 9 - 6 + 1 = -0,5$	$\rightarrow (3;-0,5)$
4	$f(4) = \frac{1}{2} \cdot (4)^2 - 2 \cdot (4) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 16 - 8 + 1 = 1$	$\rightarrow (4;1)$
5	$f(5) = \frac{1}{2} \cdot (5)^2 - 2 \cdot (5) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 25 - 10 + 1 = 3,5$	$\rightarrow (5;3,5)$
6	$f(6) = \frac{1}{2} \cdot (6)^2 - 2 \cdot (6) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 36 - 12 + 1 = 7$	$\rightarrow (6;7)$

Maintenant que l'on a nos points, plaçons-les sur le graphique et relier-les. Nous obtenons ainsi la représentation graphique de la fonction.



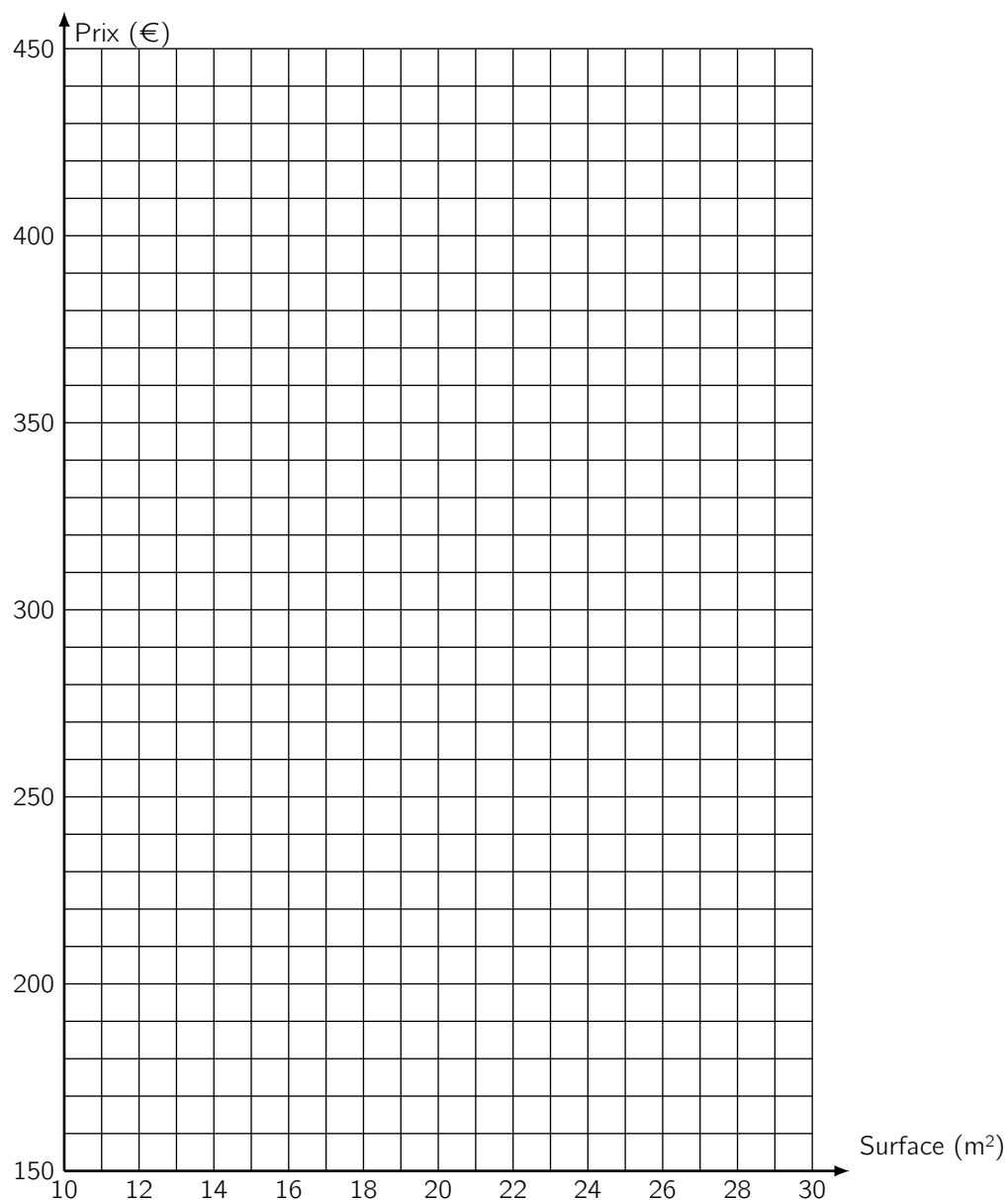
2.1 Activité – Panneau publicitaire

Le tableau ci-dessous donne les prix payés TTC, selon leur superficie, pour des panneaux publicitaires pour lesquelles s'applique un même plan tarifaire.

Surface (m ²)	Prix (€)
22	330
14	210
16	240
12	180
24	360
11	165

Avec ce même plan tarifaire, Olivier a commandé un panneau publicitaire rectangulaire de 6 m par 3 m.

À l'aide de points, on demande de représenter les données du tableau dans le repère cartésien ci-dessous sur lequel les abscisse et ordonnée représentent respectivement la surface du panneau publicitaire et son prix.



En se basant sur le graphe, déterminer le prix qu'Olivier paiera son panneau publicitaire.

On dit que le prix **est fonction de** la surface.

Si l'on appelle cette fonction f , on écrira $f(16) = 240$ pour spécifier qu'une surface de 16 m² coûte 240 €.

Compléter les égalités suivantes :

$$f(14) = \dots \quad f(19) = \dots \quad f(23) = \dots \quad f(27) = \dots$$

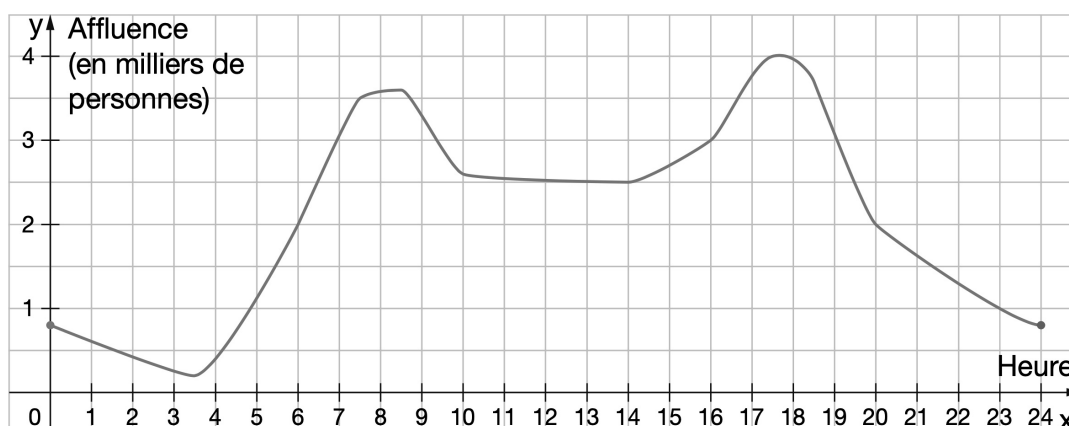
Si x et y représentent respectivement la surface en mètres carrés et le prix en euros, déterminer une expression algébrique de y en fonction de x .

Vérifier, par calcul, le prix à payer par Olivier pour son panneau publicitaire.

2.2 Activité – Portail électronique

Les portails électroniques situés à l'entrée des stations de métro permettent à la société de transport en commun de connaître la fréquentation de l'ensemble des stations à chaque instant.

Le graphique ci-dessous indique la fréquentation au cours d'une journée. L'axe des y représente l'affluence en milliers de personnes et l'axe des x représente les heures d'affluence.



Le graphique est-il celui d'une fonction ? Justifier.

La variable qui dépend de l'autre est appelée **variable dépendante**, l'autre étant la **variable indépendante**.

Compléter :

- * Dans cette activité, la variable indépendante est :
- * et la variable dépendante est :

Si l'on appelle f la fonction représentée, déterminer $f(16)$. Justifier.

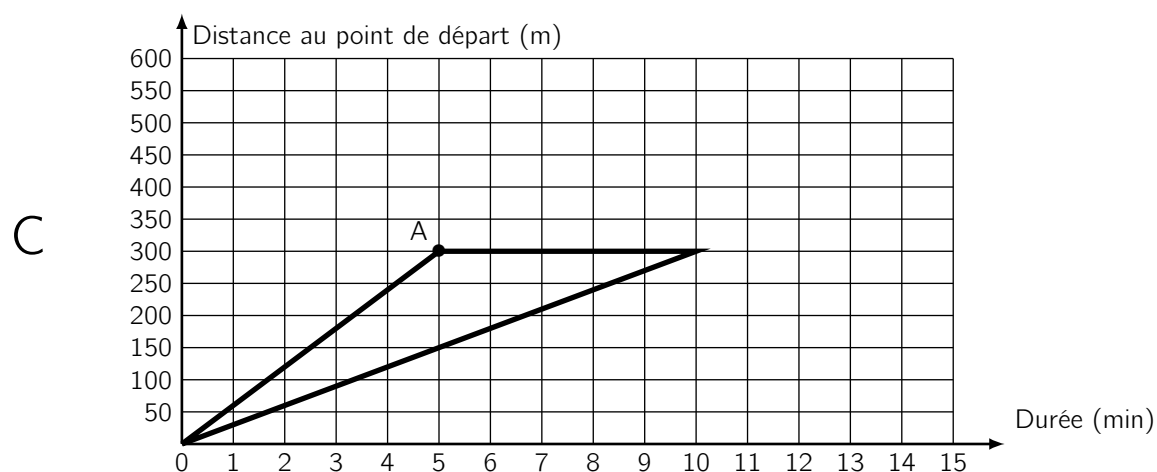
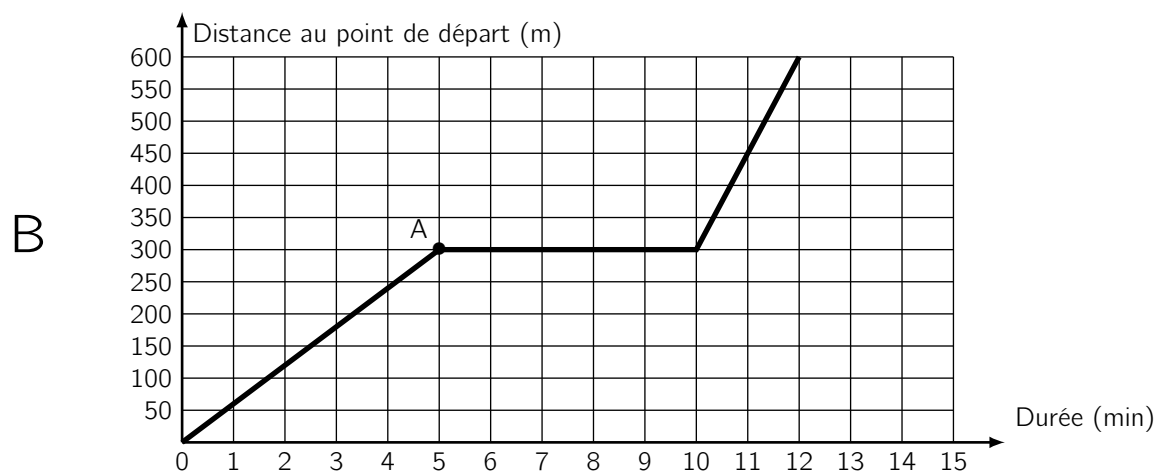
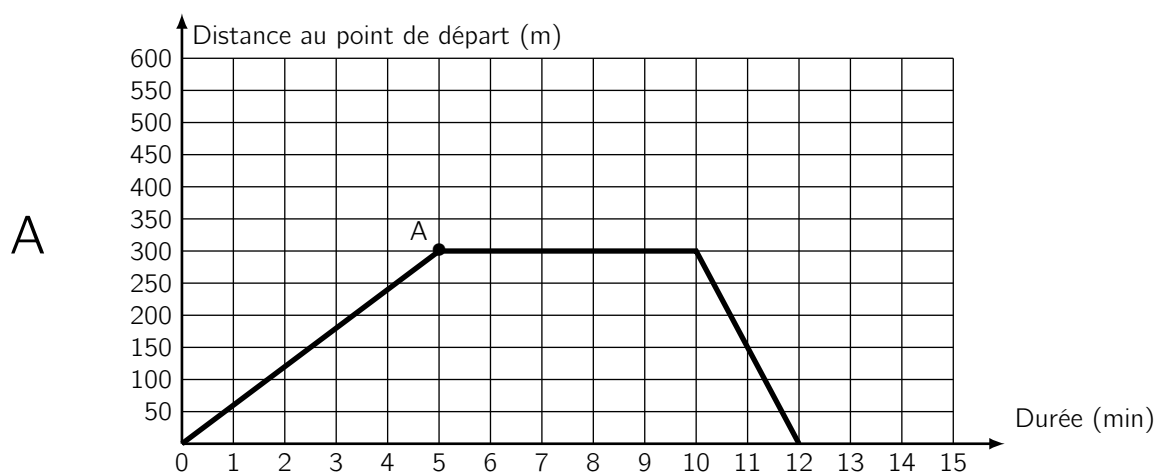
À l'aide d'une phrase, exprimer ce que représentent $f(16)$ ainsi que sa valeur dans le contexte présenté.

2.3 Activité – Aller-retour

Les élèves Amandine et Tom pensent devoir changer de bâtiment durant la récréation. Ils partent donc du bâtiment 3A et marchent jusqu'au bâtiment 6. Là, ils attendent 5 minutes et sont étonnés de ne voir personne. Se souvenant d'un changement d'horaire, ils retournent en courant jusqu'au bâtiment 3A pour ne pas arriver en retard au cours.

Répondre aux questions des pages suivantes.

a) Parmi les graphiques ci-dessous, lequel correspond à ce récit ?



b) Quelle est l'ordonnée du point A ?

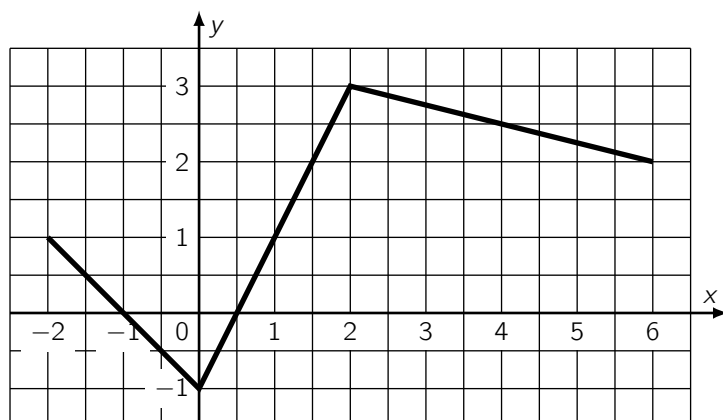
c) Quelles sont les coordonnées des autres points remarquables ? (Les identifier sur le bon graphique)

d) Évaluer la vitesse moyenne en course (en km/h) d'Amandine et de Tom.

2.4 Exercices

Exercice 1

Quand cela est possible, compléter les informations relatives à chaque graphique.



$$f(2) = \dots$$

$$f(0) = \dots$$

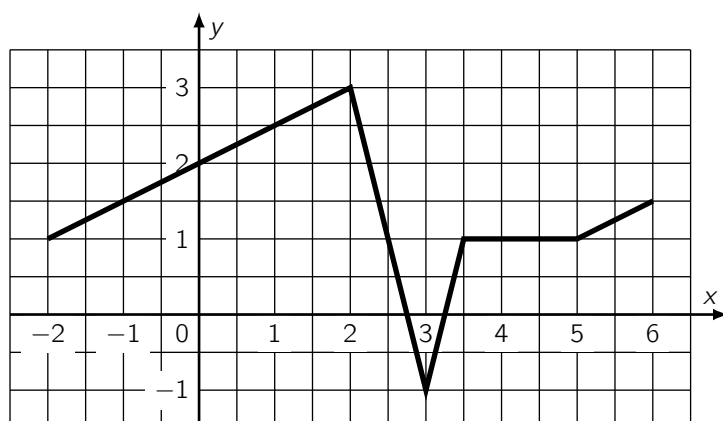
$$f(-1) = \dots$$

$$f(3) = \dots$$

$$f(\dots) = 2$$

$$f(\dots) = -2$$

$$f(\dots) = 0$$



$$f(6) = \dots$$

$$f(4) = \dots$$

$$f(-1) = \dots$$

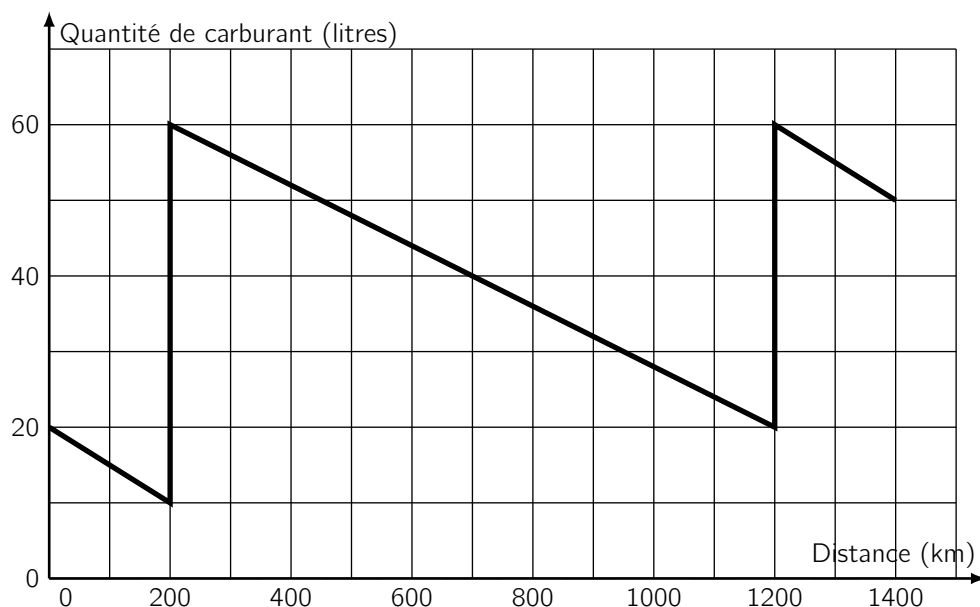
$$f(3) = \dots$$

$$f(\dots) = 3$$

$$f(\dots) = -1$$

Exercice 2

Le graphique suivant montre l'évolution du niveau de carburant dans le réservoir d'une voiture au cours d'un départ en vacances.



1. Combien de litres de carburant y a-t-il dans le réservoir au début du voyage ?
2. Quelle est la longueur du voyage (en km) ?
3. Combien de fois a-t-on refait le plein ?
4. Quelle est la capacité du réservoir si l'on a fait le plein à chaque fois ?
5. Au cours du voyage, après combien de kilomètres la jauge du réservoir affiche-t-elle $\frac{1}{4}$?

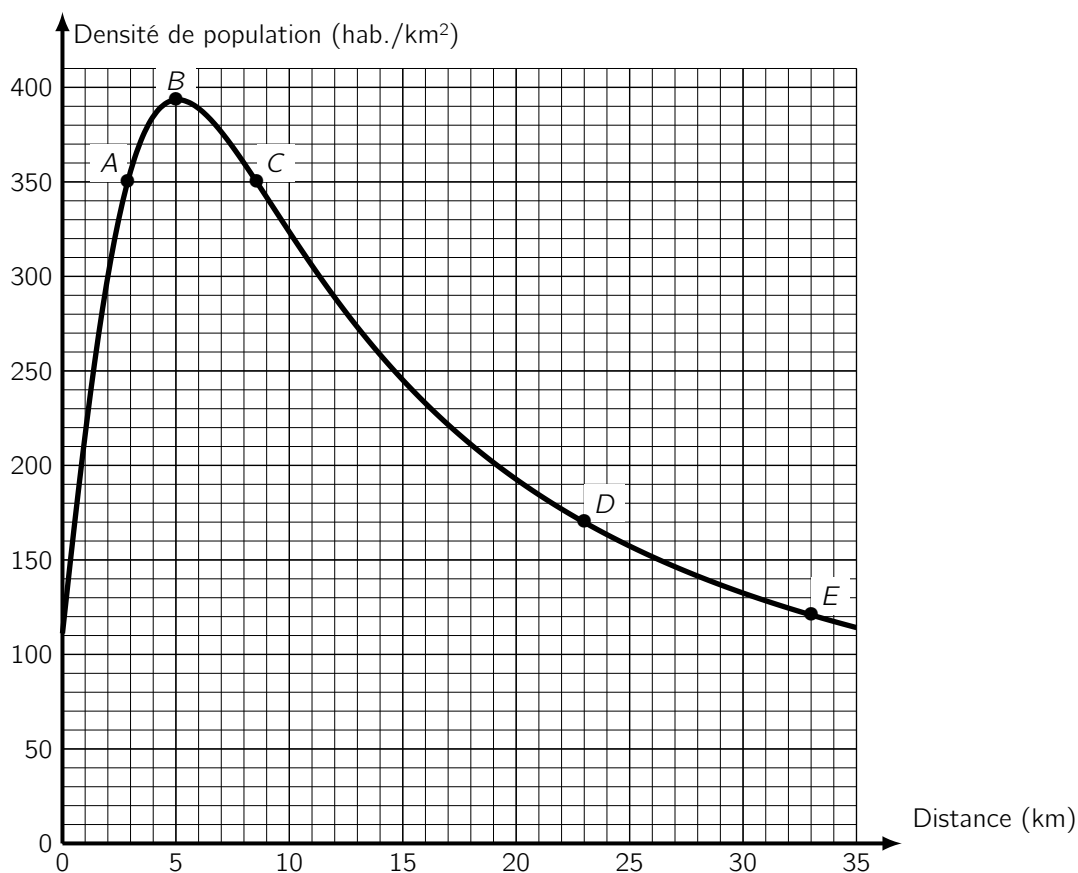
Exercice 3

Exercice sur deux pages !

La densité de population exprime le nombre de personnes par unité de surface. En général, elle est exprimée en nombre d'habitants par kilomètre carré. On l'obtient en divisant le nombre d'habitants sur une surface déterminée par sa superficie (en km^2).

En Belgique, la densité de population moyenne^a est de 375,4 hab./ km^2 . À titre de comparaison, dans la région de Bruxelles Capitale, cette densité atteint 7 511 hab./ km^2 .

Le graphique suivant représente la densité de population d'une ville en fonction de la distance, en kilomètres, au centre-ville (il s'agit d'une petite ville de Wallonie).



a. Les diverses valeurs de densité de population de cet exercice sont extraites du site www.iweps.be/indicateur-statistique/densite-de-population/ (consulté le 6/4/2022).

1. D'après le graphique, à quelle distance du centre-ville la densité de population est-elle la plus élevée ?
2. On voit que les points A et C ont même ordonnée. Comment interpréter cela dans le contexte ?
3. Quelle est la différence de densité de population entre les lieux qui correspondent au point D et au point E du graphique ?
4. Le graphique qui modélise la densité de population en fonction de la distance au centre-ville correspond au graphique de la fonction dont l'expression analytique est :

$$D(x) = \frac{4000 \cdot (x + 1)}{x^2 + 36}$$

Utiliser cette formule pour calculer

* $D(2) = \dots$

* $D(5) = \dots$

* $D(10) = \dots$

5. Décrire l'évolution de la densité de population en fonction de la distance au centre-ville.

Domaine et ensemble image d'une fonction

3.1 Activité – Logo

Un club de basket a commandé un logo devant respecter les conditions suivantes :

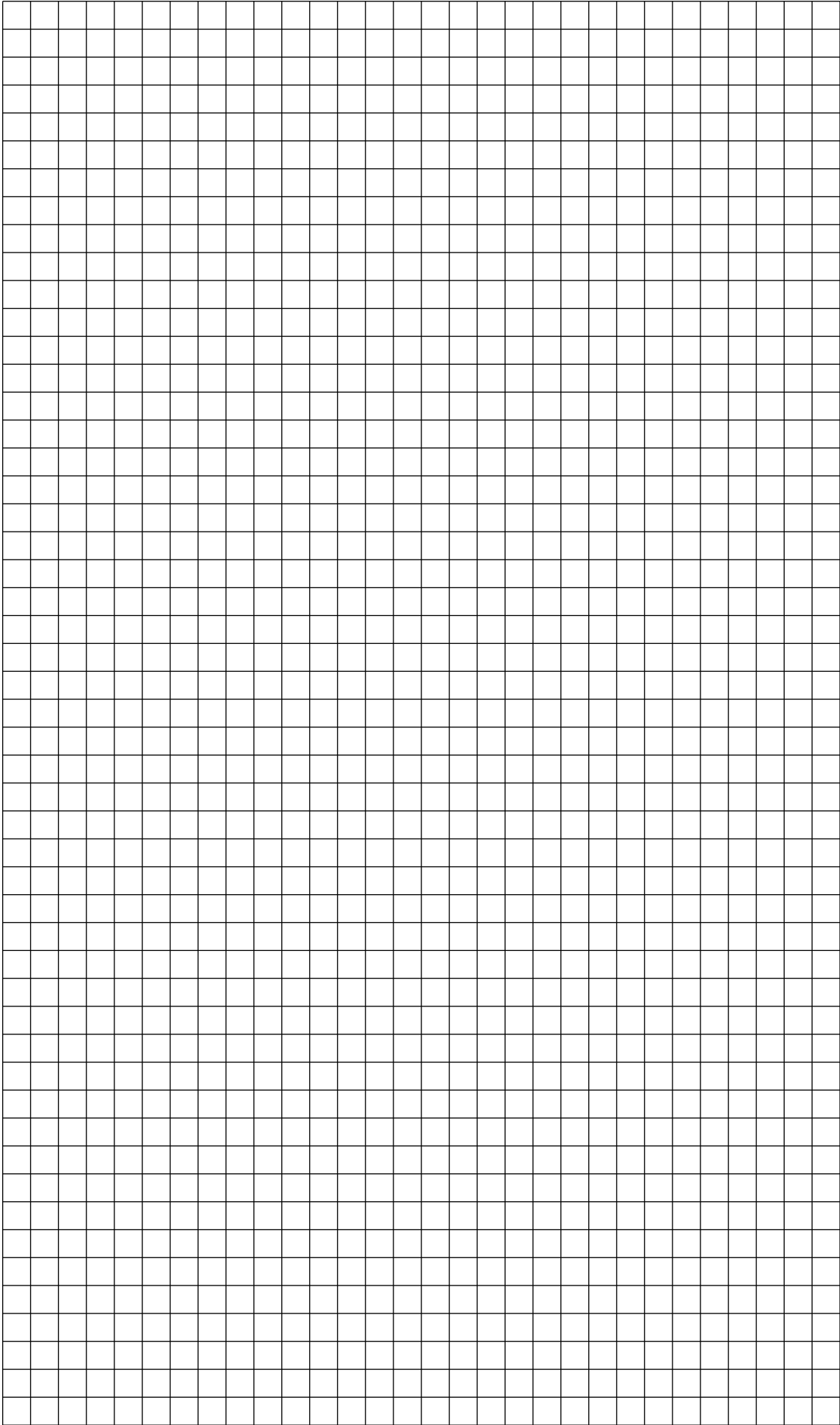
- être de forme rectangulaire ;
- avoir un rapport longueur sur largeur égal à $5/4$;
- contenir l'image d'un ballon de basket de minimum 4 cm de diamètre ;
- pouvoir être construit sur une feuille A4 disposée en mode paysage (21 cm sur 29,7 cm).

a) En respectant les conditions demandées ci-avant, représenter, sur la page suivante, un premier logo de 8 cm de large puis un second de 6 cm de large.

Puis déterminer les dimensions du plus petit et du plus grand logo réalisables.

* Dimensions du plus petit logo :

* Dimensions du plus grand logo :



b) On nomme f_1 la fonction qui exprime la longueur du logo par rapport à sa largeur.

Construire un tableau de valeurs de la fonction f_1 contenant quelques largeurs possibles x , classées par ordre croissant, et les longueurs correspondantes y , en prenant soin d'y inclure les dimensions minimales et maximales du logo (déterminées p.85).

x	
y	

Si le **domaine d'une fonction** est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable indépendante x , donner le domaine de la fonction f_1 en notant cet ensemble **Dom** f_1 .

Si l'**ensemble image d'une fonction** est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable dépendante y , donner l'ensemble image de la fonction f_1 en notant cet ensemble **Im** f_1 .

c) On nomme f_2 la fonction qui exprime l'aire du logo par rapport à sa largeur.

Construire un tableau de valeurs de la fonction f_2 contenant quelques largeurs possibles x , classées par ordre croissant, et les aires correspondantes y .

x	
y	

Déterminer le domaine et l'ensemble image de la fonction f_2 .

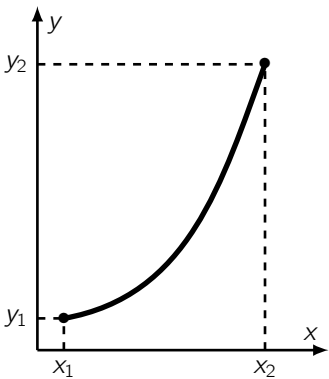
- d) Lorsque le logo est dessiné sur une feuille de papier, la surface de la feuille située à l'extérieur du logo est perdue. On nomme f_3 la fonction qui exprime l'aire de la surface perdue d'une feuille A4 par rapport à la largeur du logo.
- Construire un tableau de valeurs de la fonction f_3 contenant quelques largeurs possibles x , classées par ordre croissant, et les aires des surfaces perdues correspondantes y .

x	
y	

Déterminer le domaine et l'ensemble image de la fonction f_3 .

- e) Associe chacune des fonctions f_1 , f_2 et f_3 à son graphique. Pour chaque graphique, précise les bornes du domaine (x_1 et x_2) et celles de l'ensemble image (y_1 et y_2).

Fonction : ...



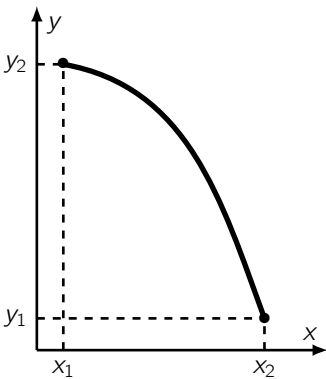
$$x_1 = \dots$$

$$x_2 = \dots$$

$$y_1 = \dots$$

$$y_2 = \dots$$

Fonction : ...



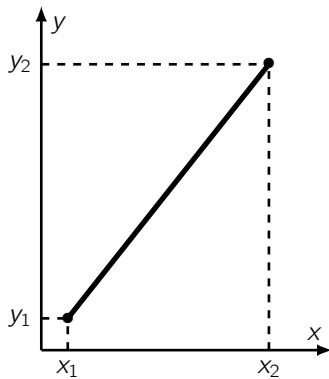
$$x_1 = \dots$$

$$x_2 = \dots$$

$$y_1 = \dots$$

$$y_2 = \dots$$

Fonction : ...



$$x_1 = \dots$$

$$x_2 = \dots$$

$$y_1 = \dots$$

$$y_2 = \dots$$

3.1.1 Les parties de $\mathbb{R}$

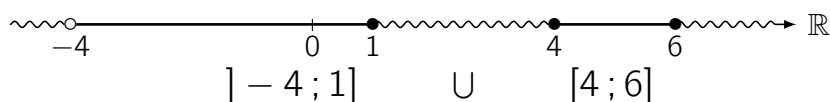
L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est souvent représenté sur une droite graduée. En utilisant ce procédé, il est facile de noter des parties de cet ensemble.

Notation	Représentation
$]a; b[$	
$[a; b]$	
$]a; b]$	
$[a; b[$	
$] - \infty ; a]$ ou $\leftarrow ; a]$	
$] - \infty ; a[$ ou $\leftarrow ; a[$	
$[a; +\infty[$ ou $[a; \rightarrow$	
$]a; +\infty[$ ou $]a; \rightarrow$	

Ensemble des réels...	Notation	Représentation
... différents de a	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	
... non nuls	$\mathbb{R}_0$	
... positifs	$\mathbb{R}^+$	
... strictement positifs	$\mathbb{R}_0^+$	
... négatifs	$\mathbb{R}^-$	
... strictement négatifs	$\mathbb{R}_0^-$	

Remarque : Lorsqu'un ensemble est constitué de deux sous-ensembles, on utilise le symbole $\cup$ (union) pour indiquer l'ensemble des éléments appartenant à l'un ou l'autre de ces sous-ensembles.

Exemple :

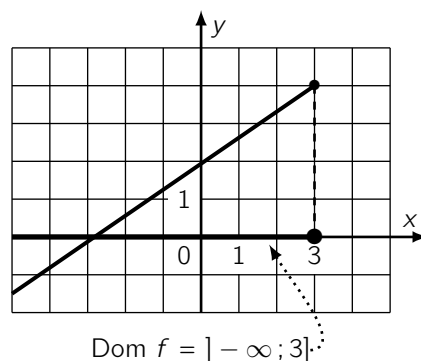
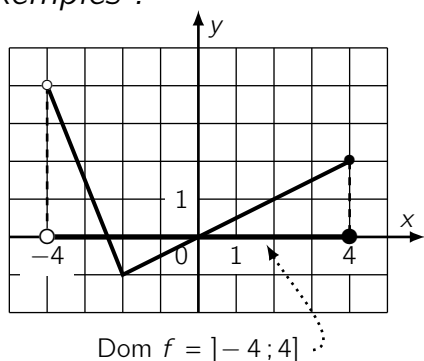


3.1.2 Domaine d'une fonction

Le domaine d'une fonction (notion déjà vue p.87) est l'ensemble des valeurs acceptées par cette fonction. On peut aussi dire que c'est l'ensemble des réels ayant une image par cette fonction.

Le domaine d'une fonction se lit donc sur l'axe des x .

Exemples :

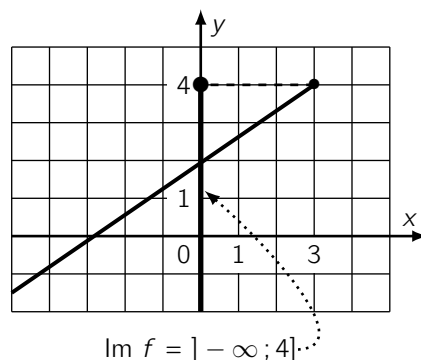
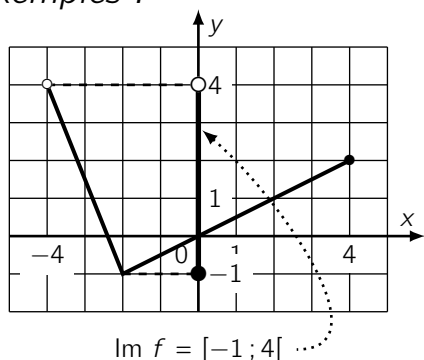


3.1.3 Ensemble image d'une fonction

L'ensemble image d'une fonction (notion déjà vue p.87) est l'ensemble des réels images par cette fonction.

L'ensemble image se lit donc sur l'axe des y .

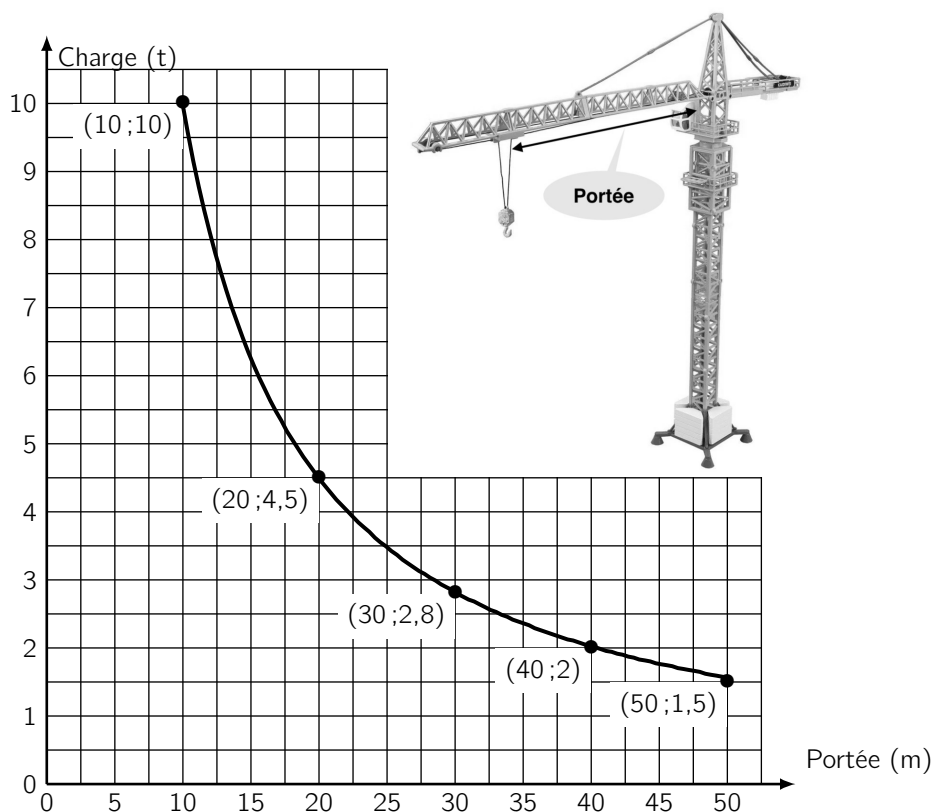
Exemples :



3.2 Activité – Grue de chantier

La charge maximale d'une grue de chantier est fonction de la portée.

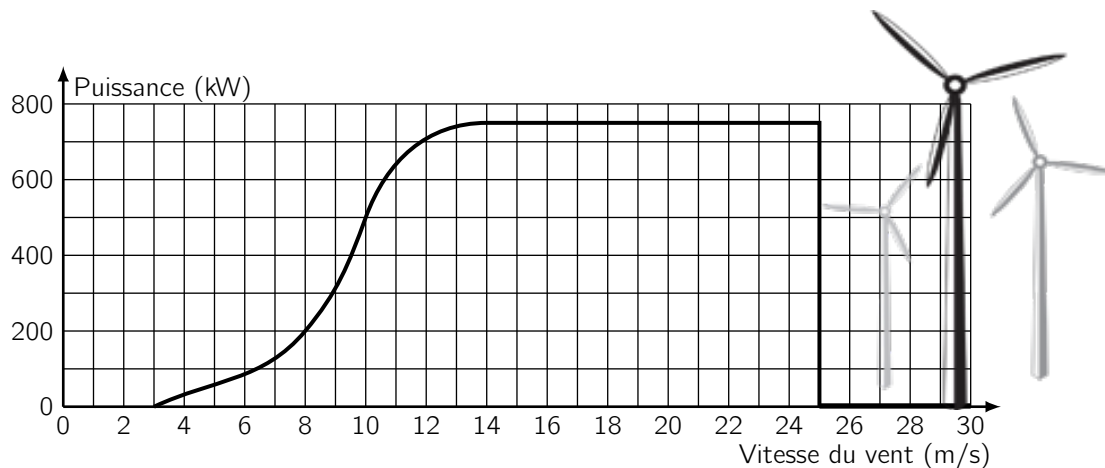
Le graphique ci-dessous fournit au grutier les renseignements concernant les charges maximales correspondant aux longueurs de la portée de sa grue. Les longueurs (en mètres) sont indiquées sur l'axe des abscisses et les charges (en tonnes) sont indiquées sur l'axe des ordonnées.



1. Quel est le domaine de cette fonction ?
2. Quel est l'ensemble image de cette fonction ?
3. Quelle est la charge maximale pour une portée de 30 m ?
4. Quelle est la portée maximale pour une charge de 7,75 tonnes ?

3.3 Activité – Éolienne

Le graphique ci-dessous donne la puissance (en kW) délivrée par une éolienne selon la vitesse du vent.

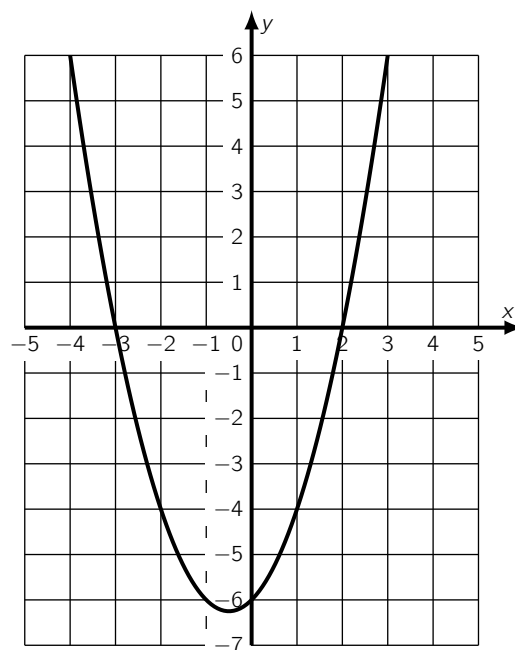


1. À partir de quelle vitesse de vent (en m/s) cette éolienne produit-elle de l'électricité ?
2. Quelle puissance délivre cette éolienne avec un vent de 8 m/s ?
3. Cette éolienne a une puissance nominale (c'est-à-dire maximale) de 750 kW. Pour quelles vitesses de vent est-elle atteinte ?
4. À partir de quelle vitesse de vent (en m/s) arrête-t-on cette éolienne ?
5. Pour quelles vitesses de vent (en m/s) l'éolienne délivre-t-elle une puissance supérieure à 500 kW ?
6. En s'appuyant sur le cas d'un vent de 25 m/s, expliquer pourquoi ce graphe ne représente pas une fonction.

Intersections de la fonction avec les axes

4.1 Activité – Fonction & intersections

Le graphe ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^2 + x - 6$.



Nous constatons que cette fonction coupe l'axe des x en deux points.
Quelles sont les coordonnées des points d'intersection entre la fonction et l'axe des abscisses ?

Les **racines** de la fonction sont les abscisses des points d'intersection du graphe de la fonction avec l'axe des x .

Les racines de la fonction $f(x) = x^2 + x - 6$ sont donc : et

La fonction coupe aussi l'axe des y en un point.

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection entre la fonction et l'axe des ordonnées ?

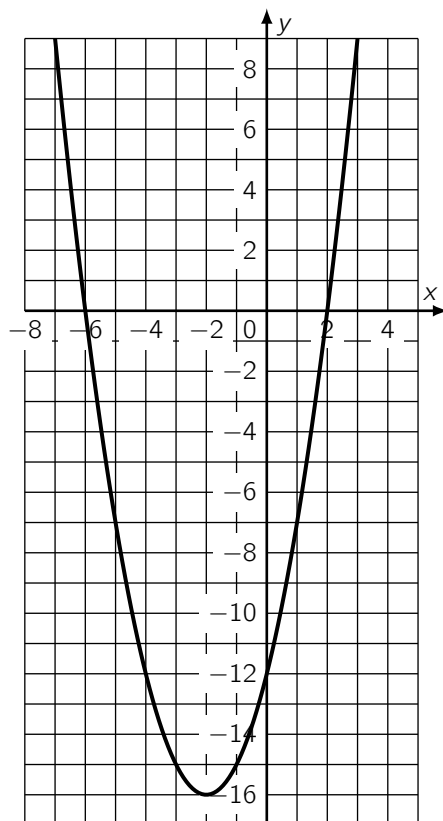
L'**ordonnée à l'origine** d'une fonction est l'ordonnée du point d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe des y .

L'ordonnée à l'origine de la fonction $f(x) = x^2 + x - 6$ est donc :

4.2 Exercices

Exercice 1

Le graphe ci-dessous représente une fonction.



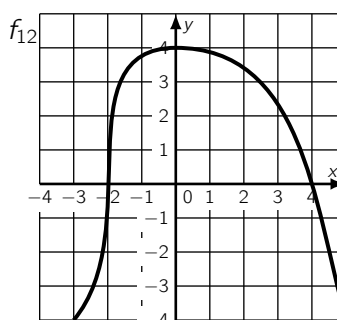
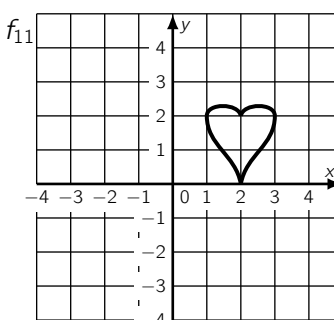
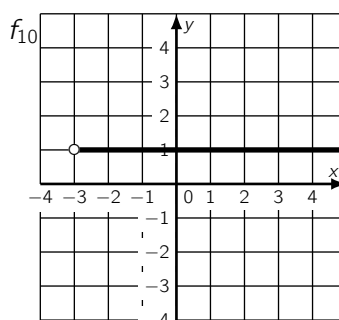
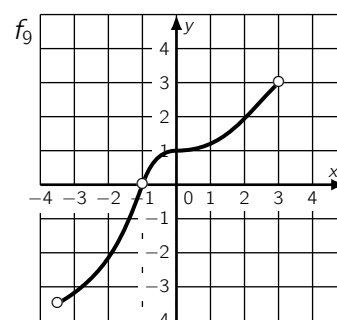
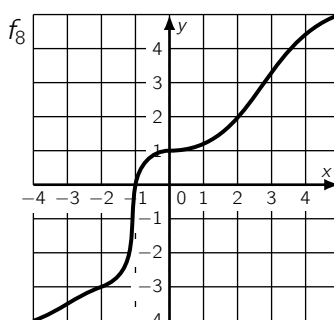
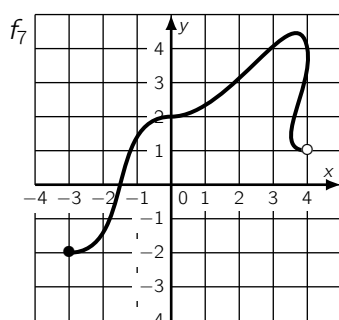
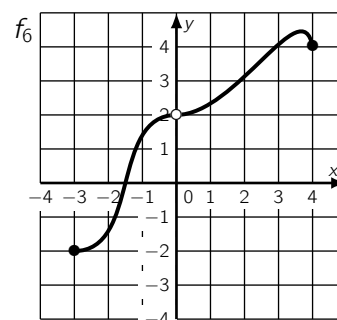
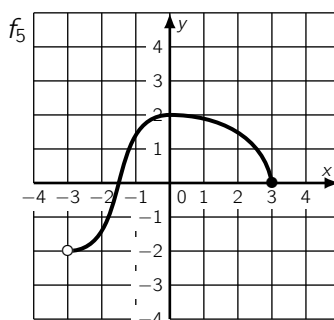
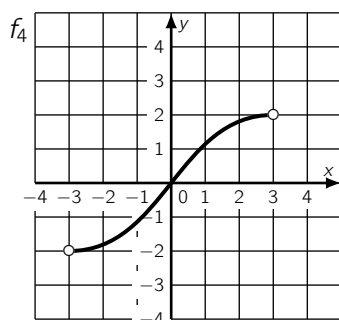
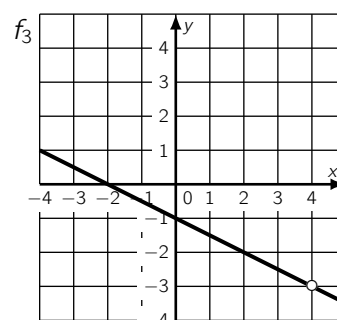
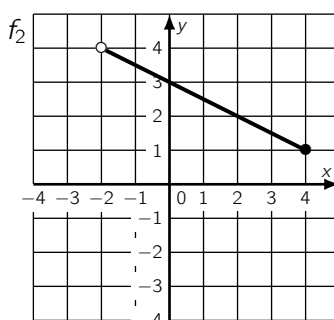
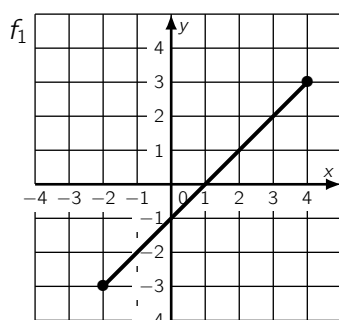
1. Quel est le domaine de la fonction ?
2. Quel est l'ensemble image de la fonction ?
3. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de la fonction avec l'axe des x ?
4. Quelles sont les racines de la fonction ?
5. Que vaut l'ordonnée à l'origine de la fonction ?

Exercice 2

Exercice sur deux pages !

Voici une douzaine de graphes.

Compléter, si c'est possible, pour chacune des fonctions, le tableau de la page suivante en y indiquant le domaine, l'ensemble image, la (ou les) racine(s) et l'ordonnée à l'origine de chaque graphe.

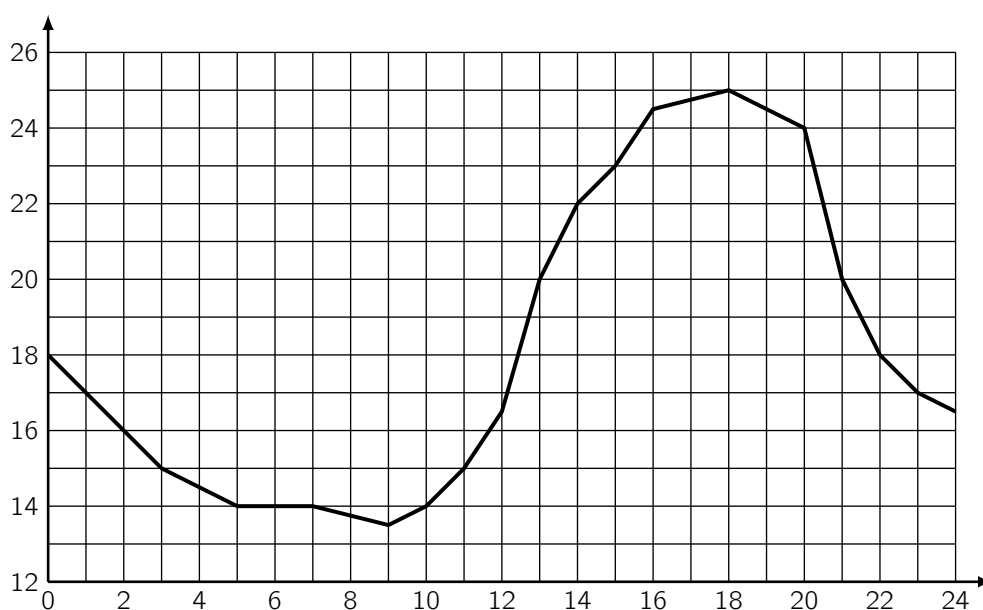


Compléter le tableau.

	Domaine de la fonction	Ensemble image de la fonction	Racine(s)	Ordonnée à l'origine
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				
f_5				
f_6				
f_7				
f_8				
f_9				
f_{10}				
f_{11}				
f_{12}				

5.1 Activité – Évolution de températures (1)

Le graphe ci-dessous représente l'évolution des températures relevées, au demi degré près, dans une station météorologique. On note T la fonction qui lie la température du lieu à l'heure de son relevé.



1. Ce graphe est incomplet : quelle légende doit-on écrire sur chacun des axes ?

* Axe des abscisses (x) :

* Axe des ordonnées (y) :

2. Les questions suivantes signifient la même chose :

- « *Quelle température faisait-il à 10 heures ?* »
- « *Que vaut $T(10)$?* »
- « *Quelle est l'**image** de 10 par la fonction T ?* »

Quelle est la réponse à ces questions ?

3. Les questions suivantes signifient la même chose :

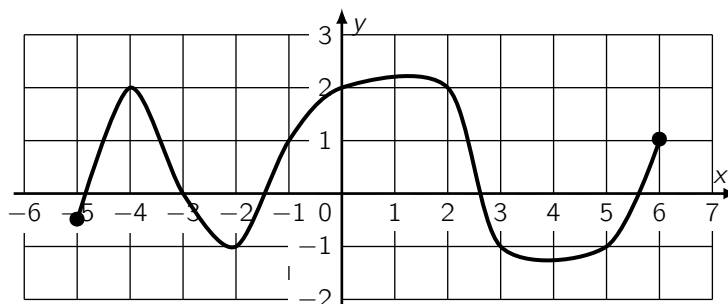
- « *À quelles heures la température était-elle de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$?* »
- « *Quels sont les **antécédents** de 20 pour la fonction T ?* »

Quelles sont les réponses à ces questions ?

5.2 Exercices

Exercice 1

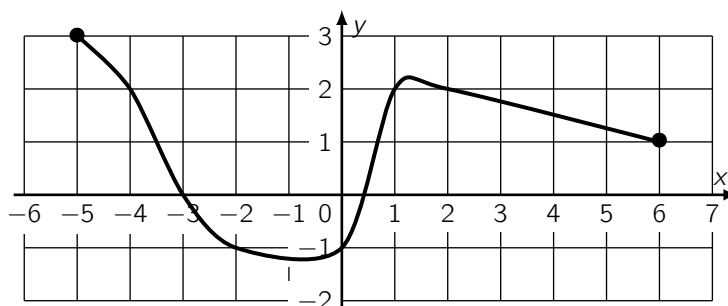
Le graphe ci-dessous représente une fonction.



1. Que valent les images de -4 , de 2 et de 5 ?
2. Quels sont les antécédents de -1 et de 2 ?

Exercice 2

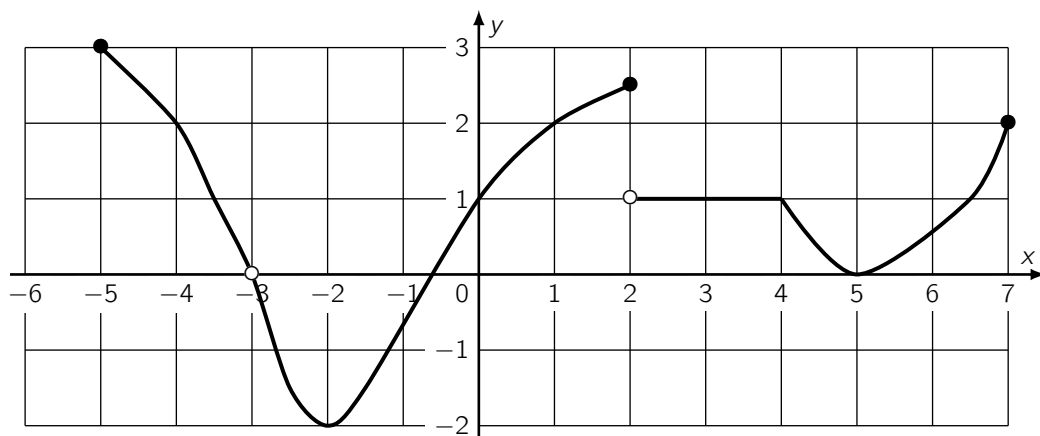
Le graphe ci-dessous représente une fonction.



1. Que valent les images de -5 , de -2 et de 1 ?
2. Quels sont les antécédents de -1 et de 2 ?

Exercice 3

Le graphe ci-dessous représente une fonction.



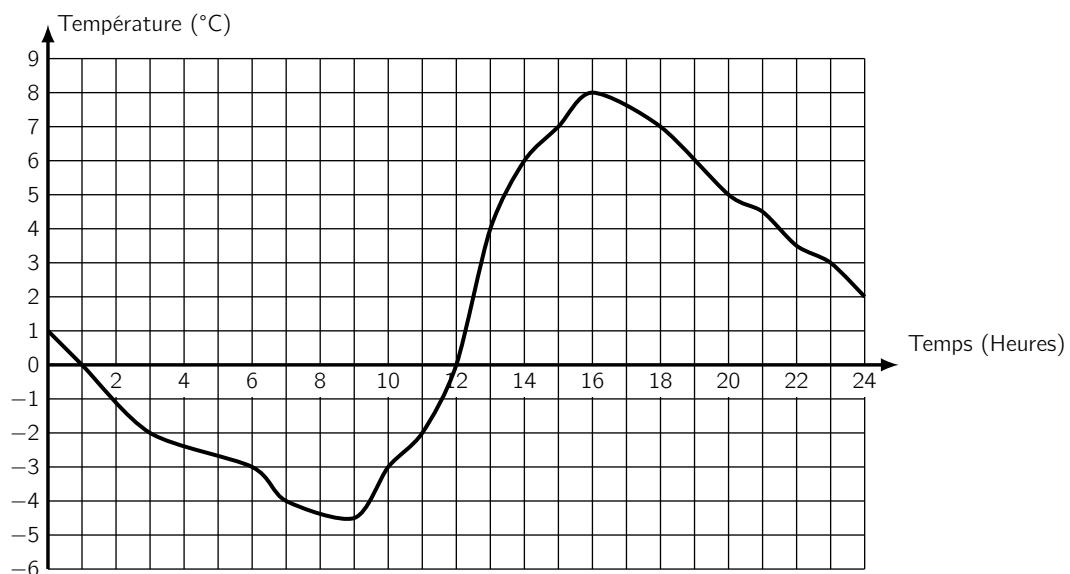
- Déterminer le domaine, l'ensemble image, les racines et l'ordonnée à l'origine de la fonction.
- Que valent les images de 2, de 3 et de -5 ?
- Quels sont les antécédents de -2 , de 2 et de $-1,5$?
- Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$$f(x) \leq 0 \quad \rightarrow x \in \dots$$

$$-2 \leq f(x) \leq -1,5 \quad \rightarrow x \in \dots$$

6.1 Activité – Évolution de températures (2)

Représentation de l'évolution des températures relevées, au demi degré près, dans une station météorologique des Alpes, durant une journée. On note T la fonction qui lie la température du lieu à l'heure de son relevé.



1. Quelle est la période couverte par les observations ? (à écrire sous forme d'intervalle)
2. Quelle est l'amplitude thermique de la journée ? (à écrire sous forme d'intervalle)
3. À quel(s) moment(s) de la journée la température était-elle nulle ?

Nous allons maintenant présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

Dans ce tableau, nous allons repérer s'il gèle ou non et à quel moment s'effectue le changement (passage à 0°C).

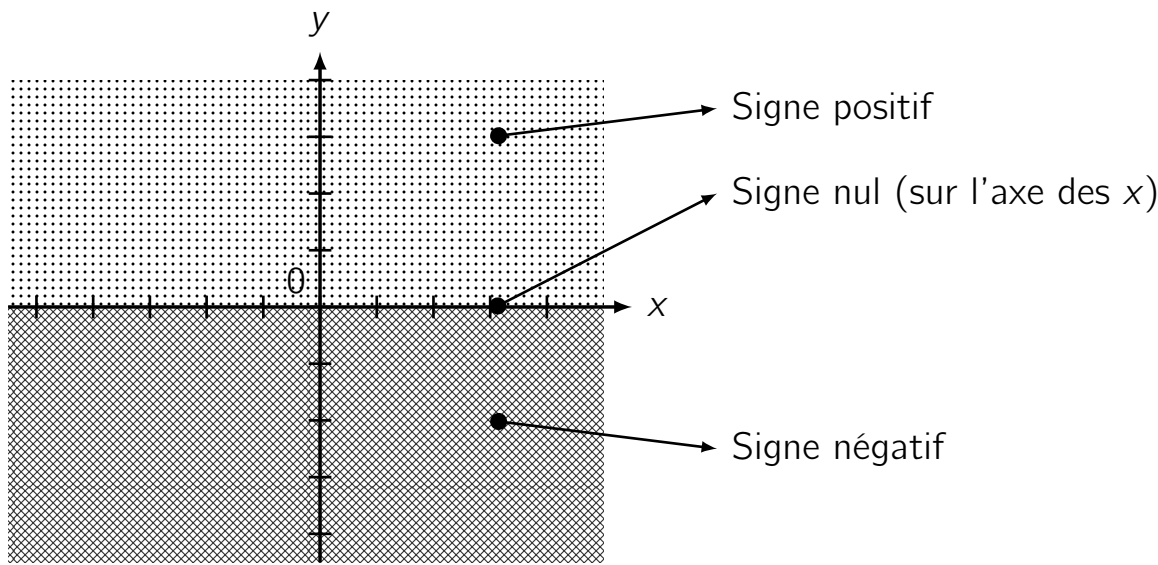
La courbe de température étant une fonction, on peut identifier chaque passage à 0°C comme une _____ de la fonction.

Nous indiquerons par un **signe « - »** lorsque la température est négative, par « 0 » lorsqu'elle est nulle et par un **signe « + »** lorsqu'elle est positive.

Ce tableau est appelé _____ de la fonction.

Heure	
Signe de la température	

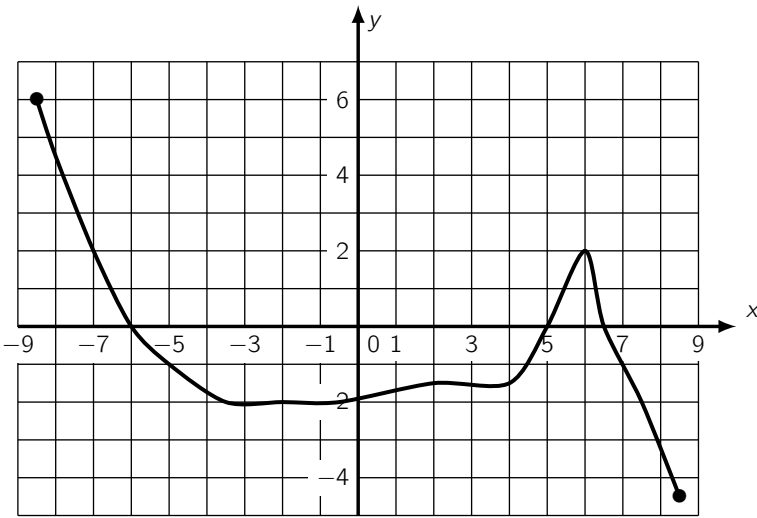
6.1.1 Le signe d'une fonction, en résumé



6.2 Exercices

Exercice 1

Le graphe ci-dessous représente une fonction.

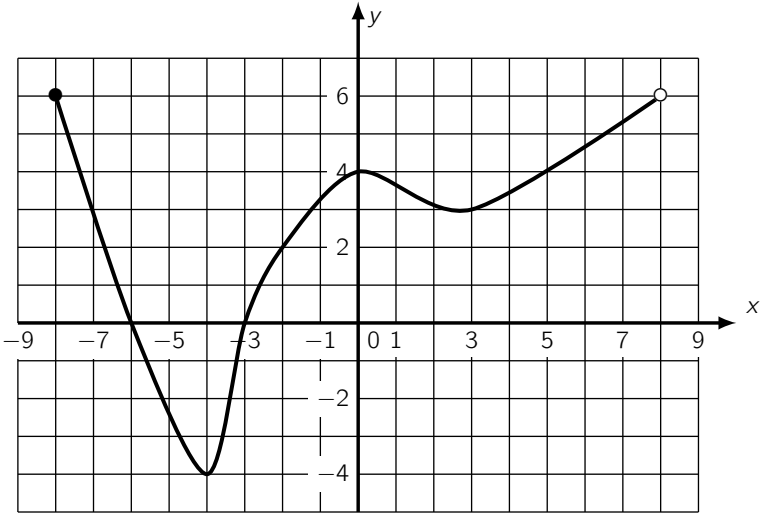


1. Déterminer le domaine et l'ensemble image de la fonction.
2. Déterminer les racines de la fonction.
3. Réaliser le tableau de signe de la fonction.

x	
y	

Exercice 2

Le graphe ci-dessous représente une fonction.



1. Déterminer le domaine et l'ensemble image de la fonction.
2. Déterminer les racines de la fonction.
3. Réaliser le tableau de signe de la fonction.

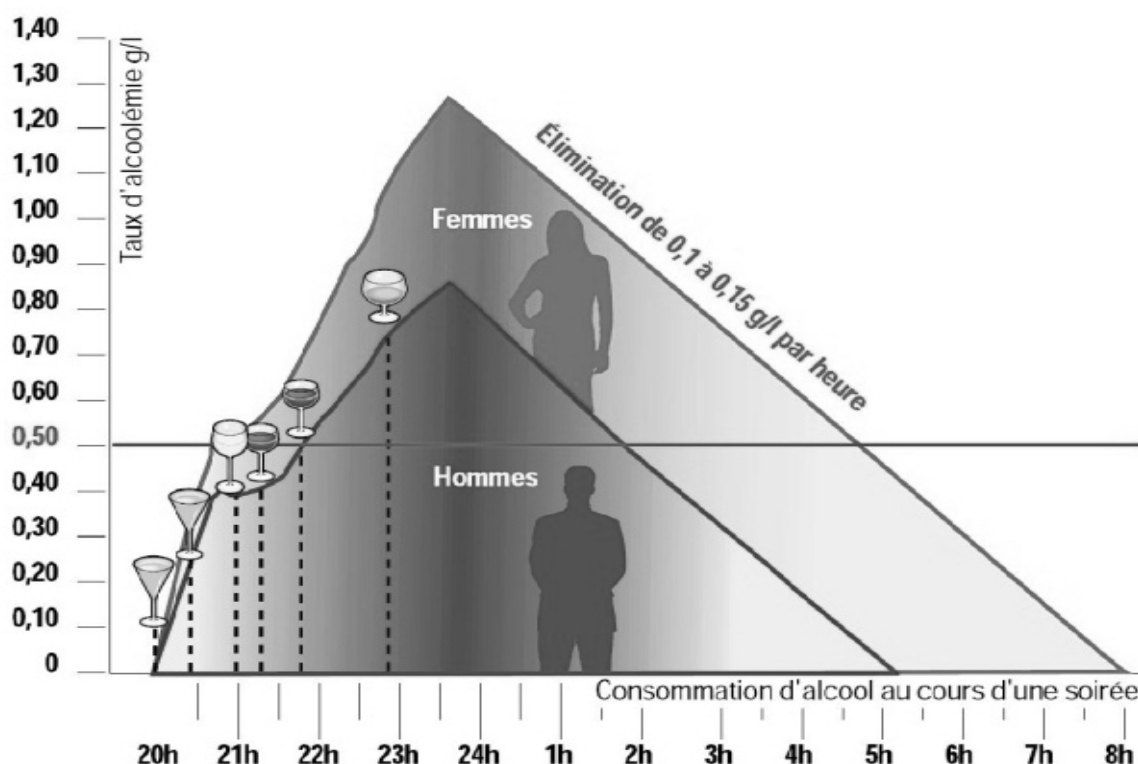
x	
y	

Variation d'une fonction

7.1 Activité – Taux d'alcoolémie

Une bande d'amis passe une soirée ensemble. Au cours de celle-ci, Sandrine boit d'abord deux verres d'apéritif, puis une bière, ensuite deux verres de vin rouge et un verre de champagne en fin de repas.

L'évolution de son taux d'alcoolémie ⁽¹⁾ est représentée sur le graphique suivant ⁽²⁾ (courbe supérieure) :



(1). Le taux d'alcoolémie est exprimé en grammes d'alcool par litre de sang.

(2). Source : <https://www.points12.fr/dangers-de-la-route/alcool-et-conduite/>

Se basant sur le graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1. Le repas a commencé à 20 heures. Sandrine décide de rentrer chez elle à 3 heures du matin. Est-elle en état de conduire sa voiture, sachant que le taux maximal autorisé est de 0,2 g/l (si Sandrine avait été une conductrice expérimentée, ce taux aurait été de 0,5 g/l).
2. Alexandre, qui a son permis depuis plus de trois ans (conducteur expérimenté), lui propose alors de la reconduire. Est-il dans la légalité s'il prend le volant à 3 heures ?
3. Sandrine ne souhaite pas se faire raccompagner. Quelle heure devra-t-elle alors attendre avant de pouvoir reprendre le volant ?
4. À quelle heure aurait-elle pu prendre le volant si elle était une conductrice expérimentée ?
5. Décrire la variation du taux d'alcoolémie de Sandrine au cours de la soirée (s'aider d'un tableau pour illustrer le propos).

x	
$f(x)$	

6. Durant quel intervalle de temps Sandrine n'est-elle pas apte à conduire ?

7.2 Exercices

Exercice 1

Soit le tableau de variation suivant :

x	-4		1		2		8
Signe	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	-8		2		2		-2

Compléter :

1. La fonction est croissante sur l'intervalle _____ ;
2. La fonction est décroissante sur l'intervalle _____ ;
3. La fonction est constante sur l'intervalle _____.

Exercice 2

Une fonction f a les caractéristiques suivantes :

1. Elle est définie sur l'intervalle $[-2; 10]$;
2. Elle est croissante sur $[3; 10]$ et décroissante sur $[-2; 3]$;
3. L'image de -2 est 5, un antécédent de 8 est 10 et $f(0) = 2$;
4. Elle admet un minimum au point de coordonnées $(3; -1)$.

Compléter son tableau de variation :

x	
$f(x)$	

Le point de coordonnées $(6; -2)$ peut-il appartenir à cette courbe ?

Exercice 3

Chacun des tableaux de variation suivants comporte une erreur. L'identifier et expliquer en quoi c'est une erreur.

Tableau 1 :

x	-5	-2	1	4
$f(x)$	4	7	-2	0

Tableau 2 :

x	-10	7	10
$f(x)$	-5	-7	-9

Tableau 3 :

x	3	6	-9	12
$f(x)$	4	666	-32	1

Tableau 4 :

x	-10	-7	0
$f(x)$	-8	0	0

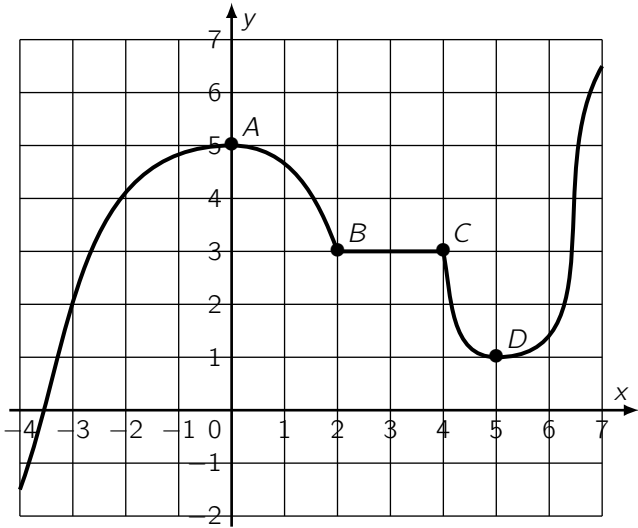
Tableau 5 :

x	-1000	0	1000
$f(x)$	$-\infty$	-5	$+\infty$

Exercice 4

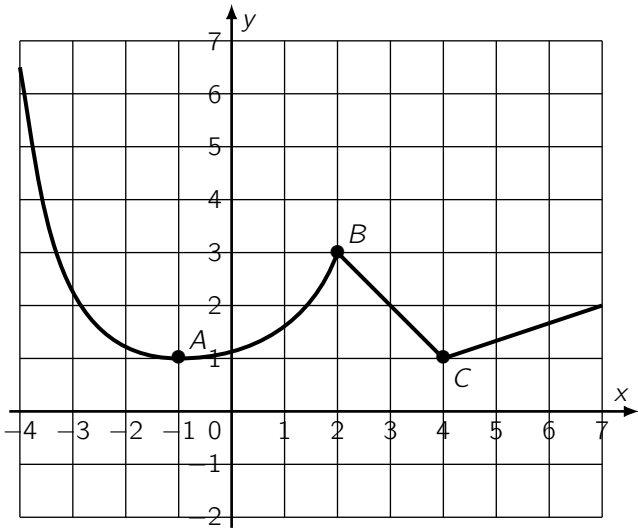
Établir le tableau de variation des fonctions suivantes :

Graphe 1 :



x	
$f(x)$	

Graphe 2 :



x	
$f(x)$	

Exercice 5

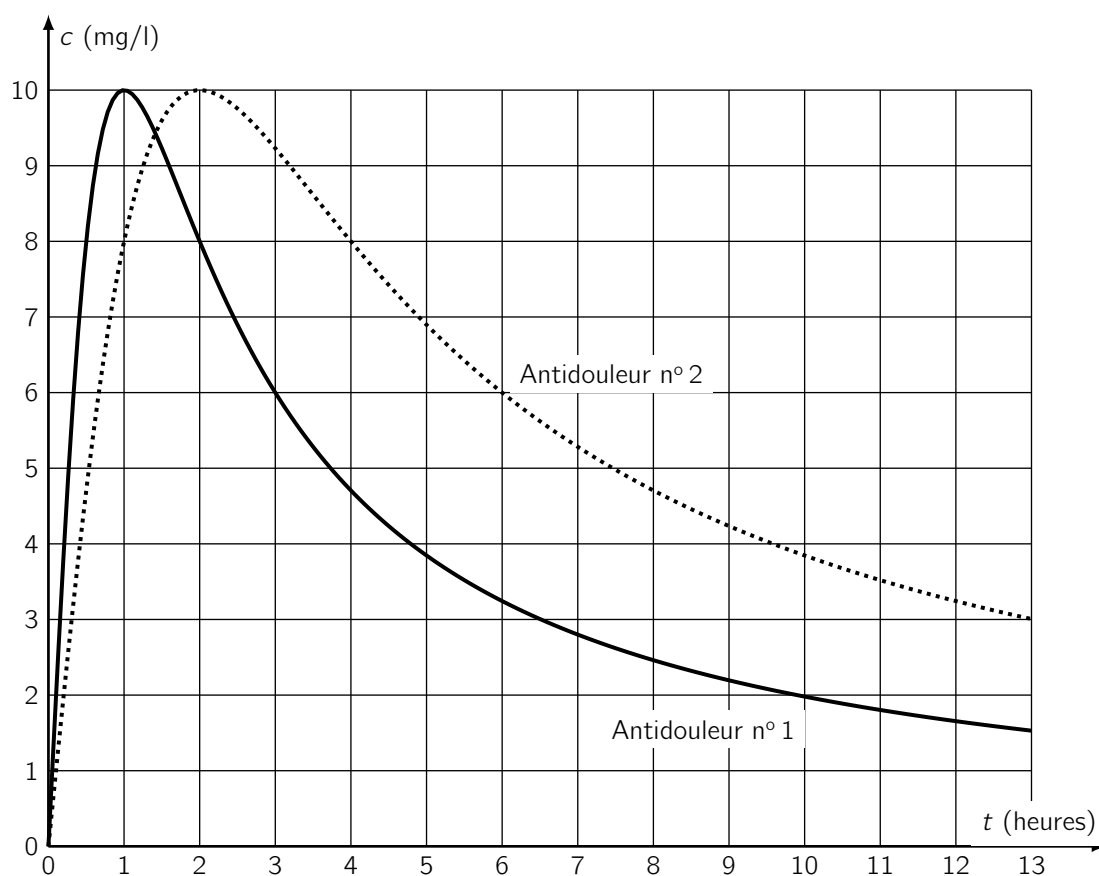
Exercice sur deux pages !

Les deux courbes du graphe ci-dessous montrent la concentration de principe actif dans le sang (en mg/l) en fonction du temps (en heures) pour deux formes différentes d'un antidouleur.

Leur action dans le corps est proportionnelle au taux de principe actif dans le sang.

Pour qu'un médicament soit efficace, il faut que sa concentration dans le sang dépasse une certaine valeur, appelée *niveau thérapeutique minimal*.

Si le niveau thérapeutique minimal, pour ces antidouleurs, est de 6 mg/l, déterminer graphiquement à partir de quel moment les médicaments ne seront plus efficaces.



Suite de l'exercice page suivante.

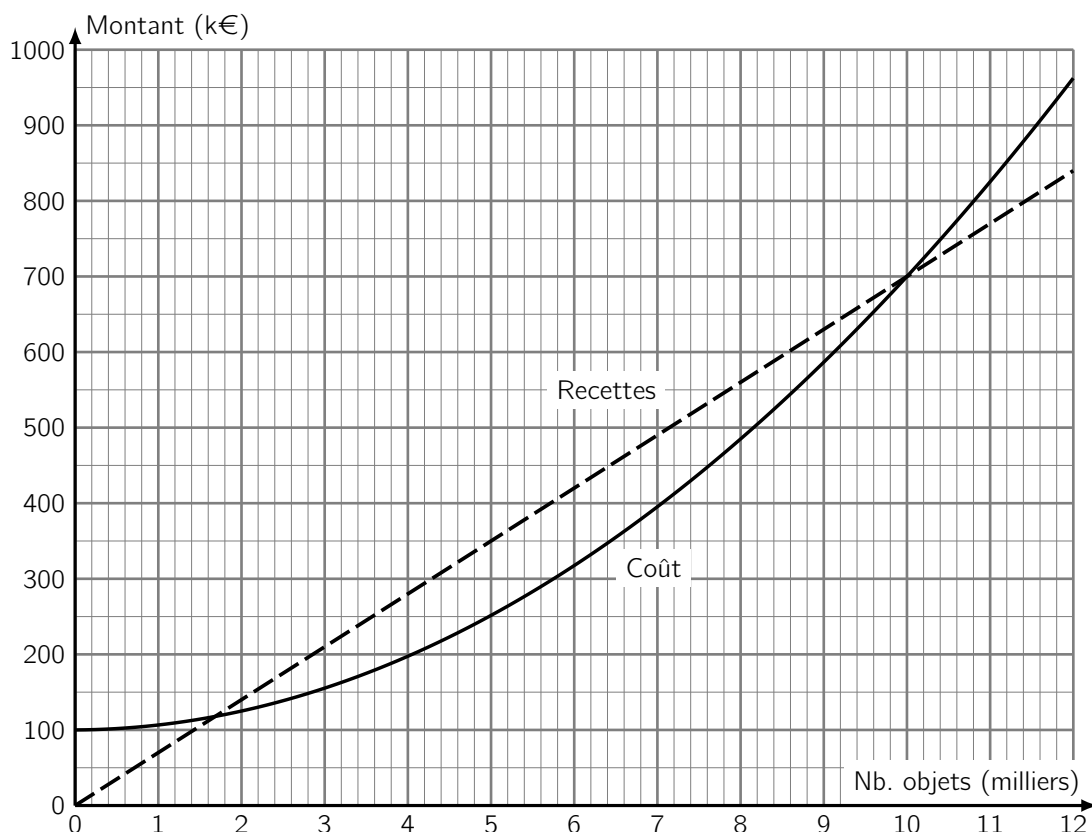
Répondre aux questions ci-dessous :

1. Pour chaque forme d'antidouleur, déterminer graphiquement sa concentration (en mg/l) dans le sang après 30 minutes, après 3 heures et après 6 heures.
2. Au bout de combien de temps chaque concentration est-elle maximale ?
3. Pour chaque médicament, indiquer sur quel intervalle de temps la concentration est croissante.
4. À quels instants a-t-on une concentration de 8 mg/l pour chacun des produits ?
5. À quel moment les deux concentrations sont-elles égales ?
6. Quel antidouleur vaut-il mieux prendre si l'on veut soulager la douleur rapidement ? Expliquer.

Résolution graphique d'équations et d'inéquations

8.1 Activité – Bénéfices

Une entreprise peut fabriquer, par mois, entre 0 et 12 000 objets. Les fonctions coût et recettes en fonction de la quantité produite et vendue sont représentées ci-dessous.

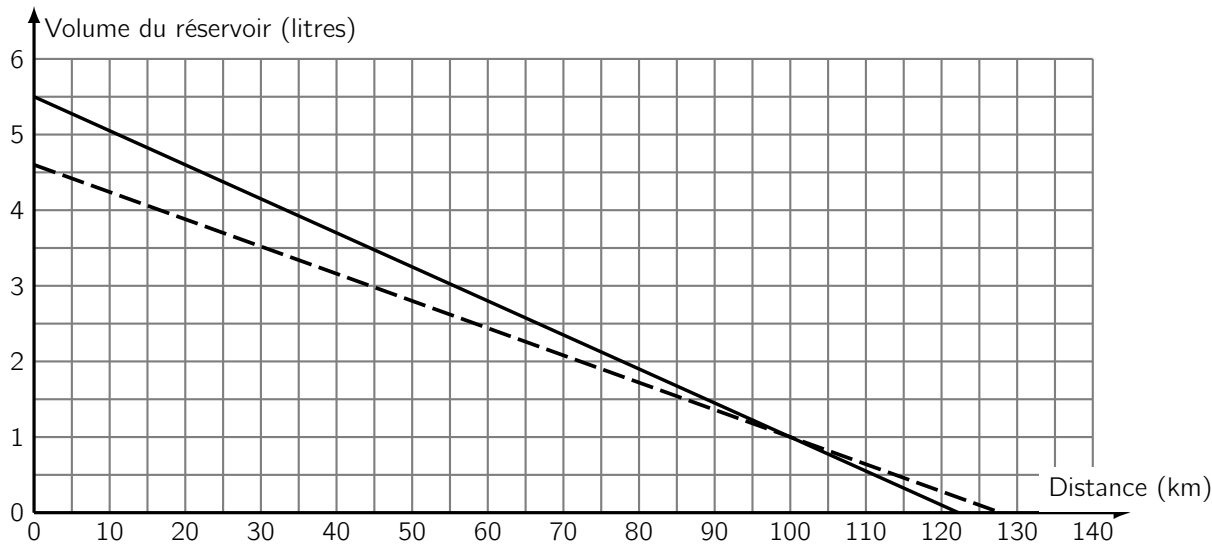


Par lecture graphique, indiquer sous forme d'intervalle les quantités à produire et à vendre pour que l'entreprise réalise des bénéfices.

8.2 Activité – Scooters

Le scooter de Morgane consomme 4,5 litres aux 100 km et son réservoir contient 5,5 litres d'essence.

Le scooter de Victor consomme 3,6 litres aux 100 km et son réservoir contient 4,6 litres d'essence.



Comparons le nombre de litres restant dans les réservoirs des scooters pour le même nombre de kilomètres parcourus.

Commençons par compléter le tableau suivant :

Nombre de km	Nombre de litres restant chez Morgane	Nombre de litres restant chez Victor
0		
20		
40		
60		
80		
100		
120		
140		

1. Répondre en utilisant le graphique :

- * Que se passe-t-il à l'intersection des deux droites ?

- * Au bout de 50 km, qui a le plus d'essence dans son réservoir ?

- * Pour quels kilométrages, le réservoir de Victor contient-il plus de carburant que celui de Morgane ?

2. Désignons par x le nombre de kilomètres parcourus. En utilisant uniquement le graphique, répondre aux questions suivantes :

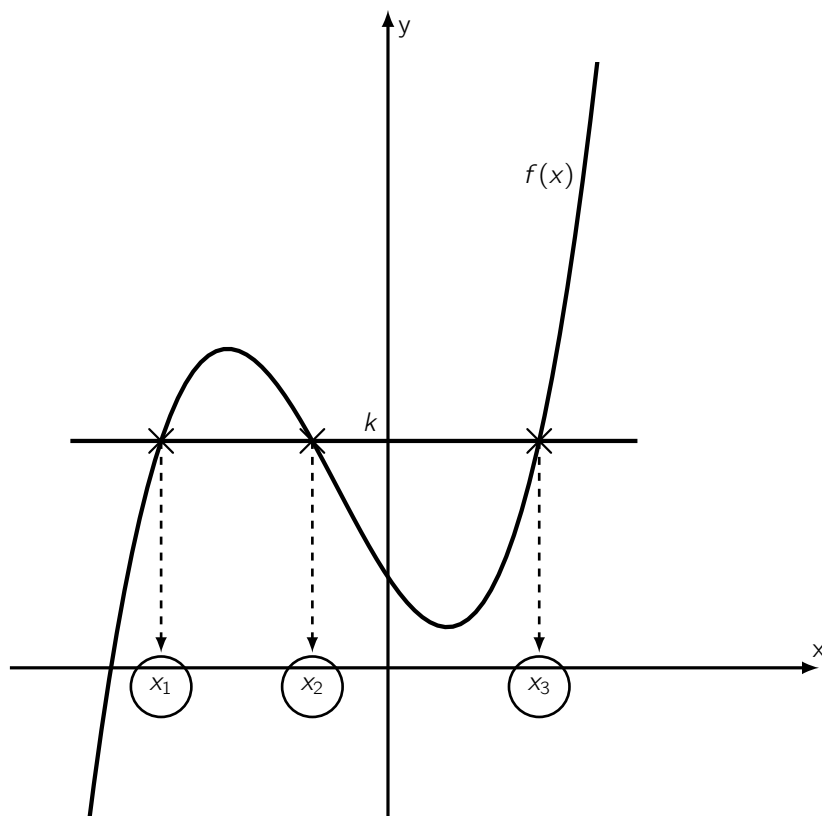
- * À quoi correspond la solution de l'équation suivante ?
$$4,6 - 0,036x = 2,1$$

- * À quoi correspond la solution de l'inéquation suivante ?
$$4,6 - 0,036x > 5,5 - 0,045x$$

8.3 En règle générale

8.3.1 Droite parallèle à l'axe des abscisses

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = k$.



Pour ce faire, il faut :

- tracer la droite parallèle à l'axe des x et passant par $y = k$;
- repérer les intersections entre la fonction et cette droite (les croix) ;
- repérer la coordonnée x (abscisse) de chaque point d'intersection.

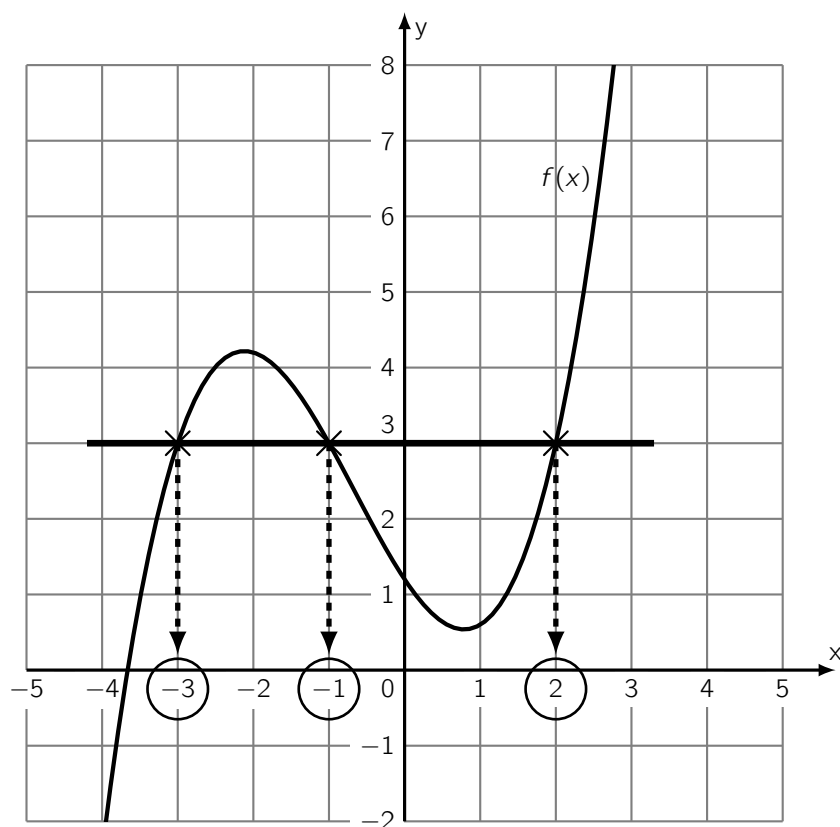
La solution est donc : $S = \{x_1; x_2; x_3\}$

Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$$S = (x_1; k); (x_2; k); (x_3; k)$$

Exemple

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = 3$.



Pour ce faire, il faut :

- tracer la droite parallèle à l'axe des x et passant par $y = 3$;
- repérer les intersections entre la fonction et cette droite (les croix) ;
- repérer la coordonnée x (abscisse) de chaque point d'intersection.

La solution est donc : $S = \{-3; -1; 2\}$

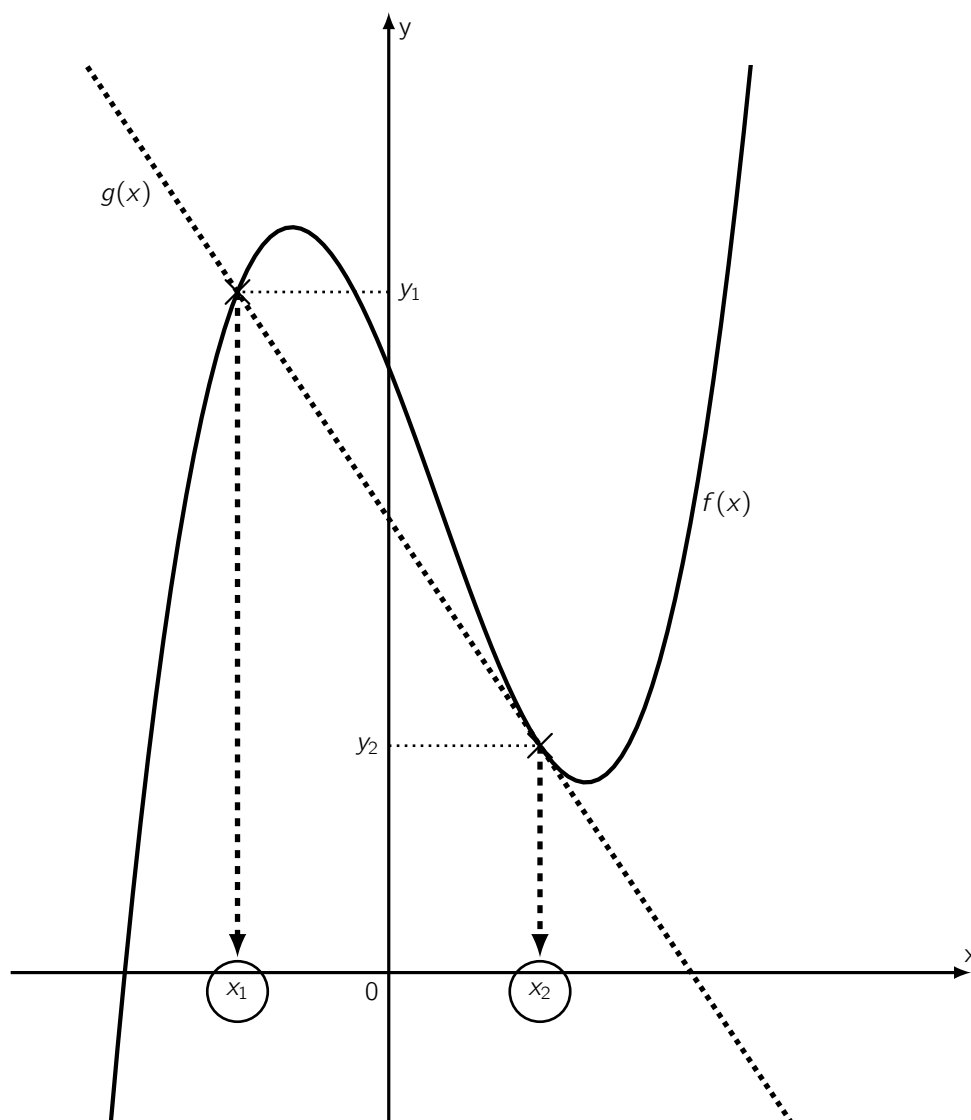
Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$S = (-3; 3); (-1; 3); (2; 3)$

Voyez-vous la différence de notation ?

8.3.2 Fonction affine

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection.

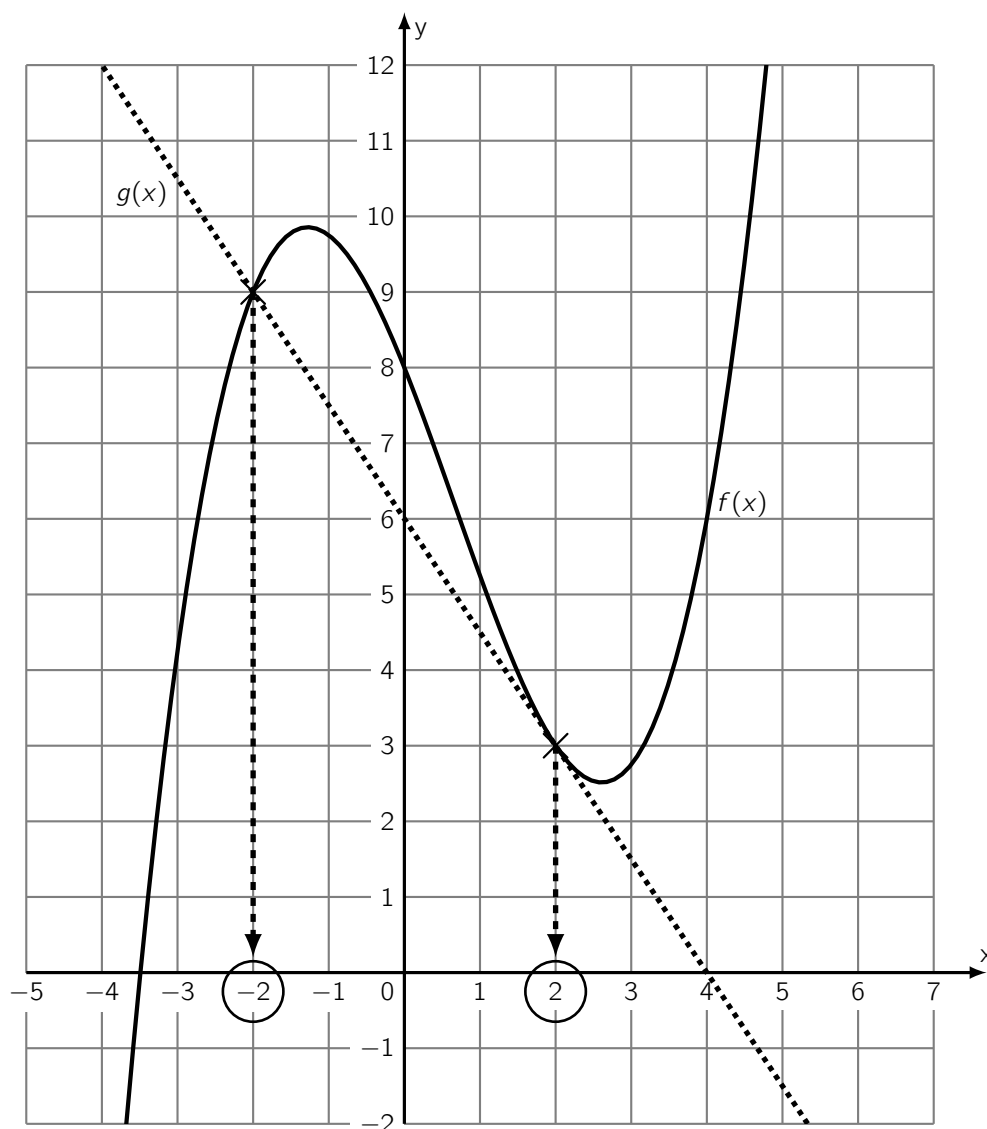
La solution est donc : $S = \{x_1; x_2\}$

Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$$S = (x_1; y_1); (x_2; y_2)$$

Exemple

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection.

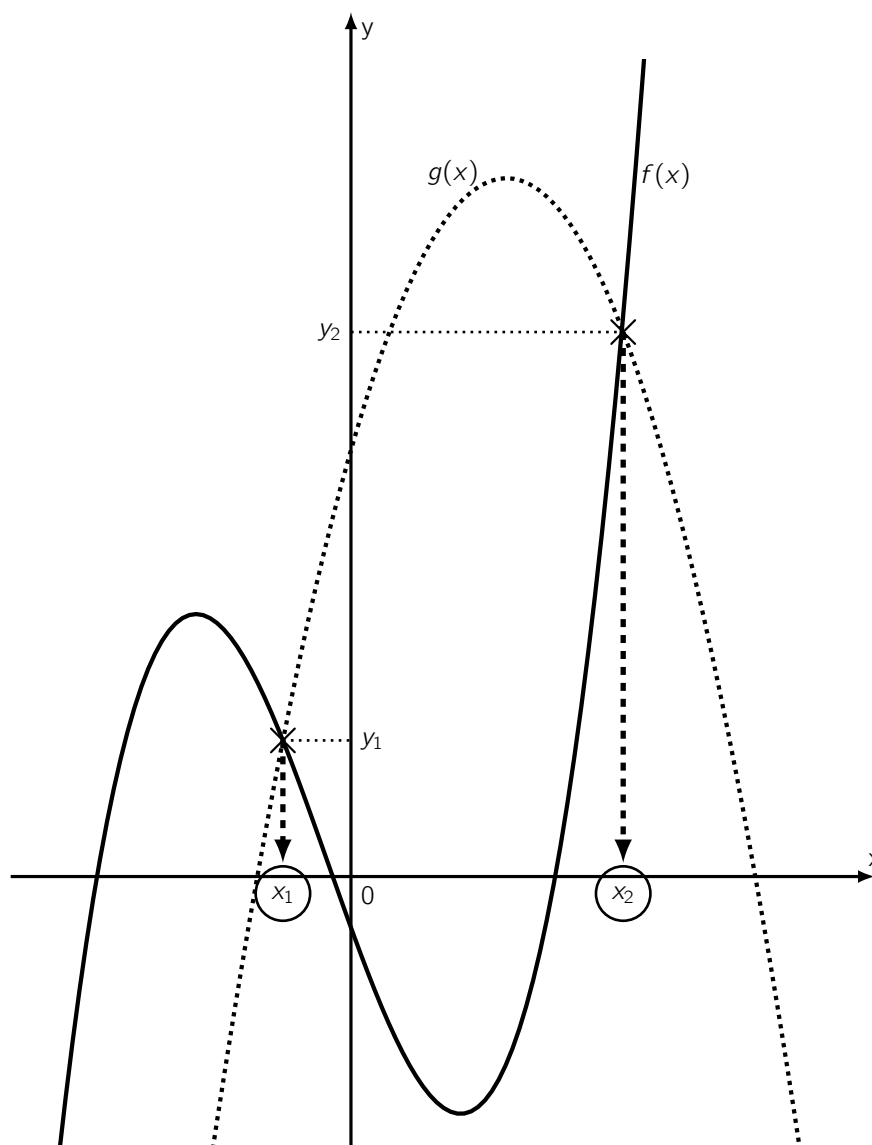
La solution est donc : $S = \{-2; 2\}$

Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$S = (-2; 9); (2; 3)$

8.3.3 Fonction quelconque

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection.

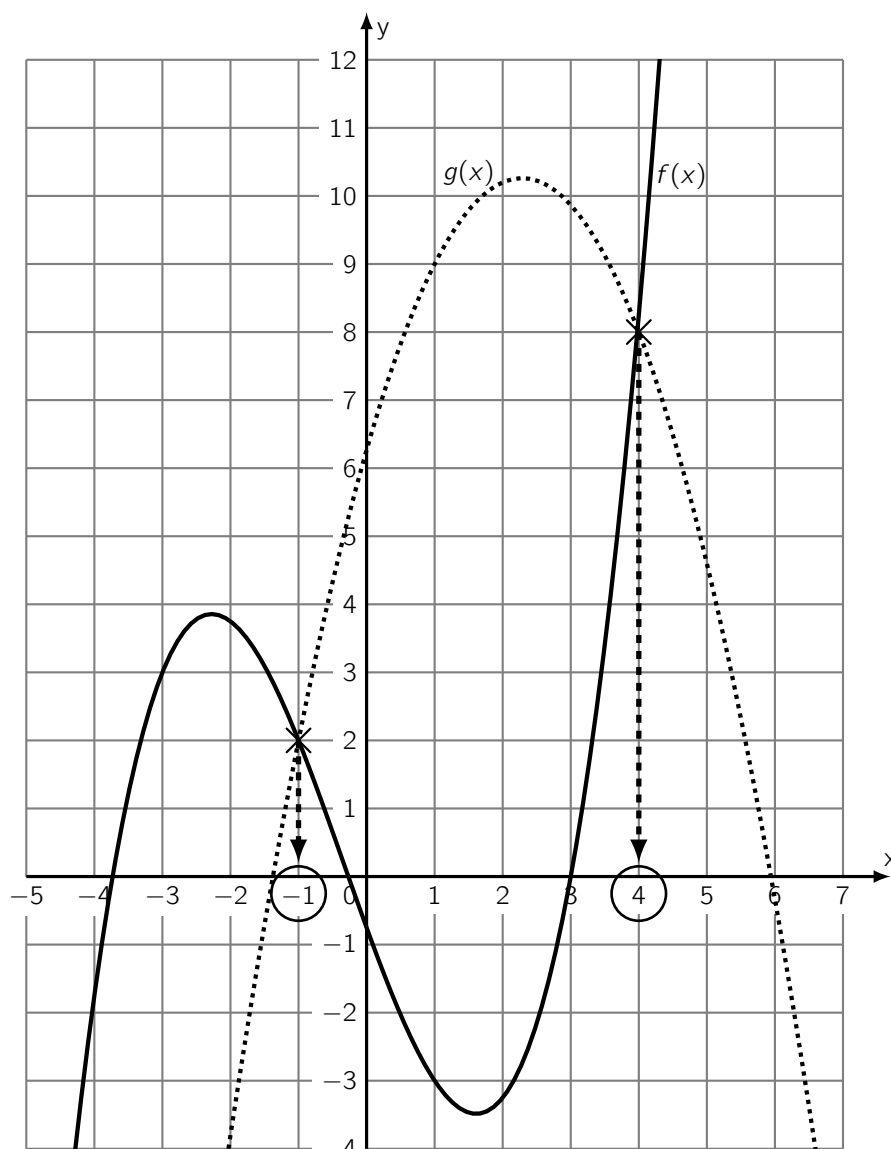
La solution est donc : $S = \{x_1; x_2\}$

Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$$S = (x_1; y_1); (x_2; y_2)$$

Exemple

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection.

La solution est donc : $S = \{-1; 4\}$

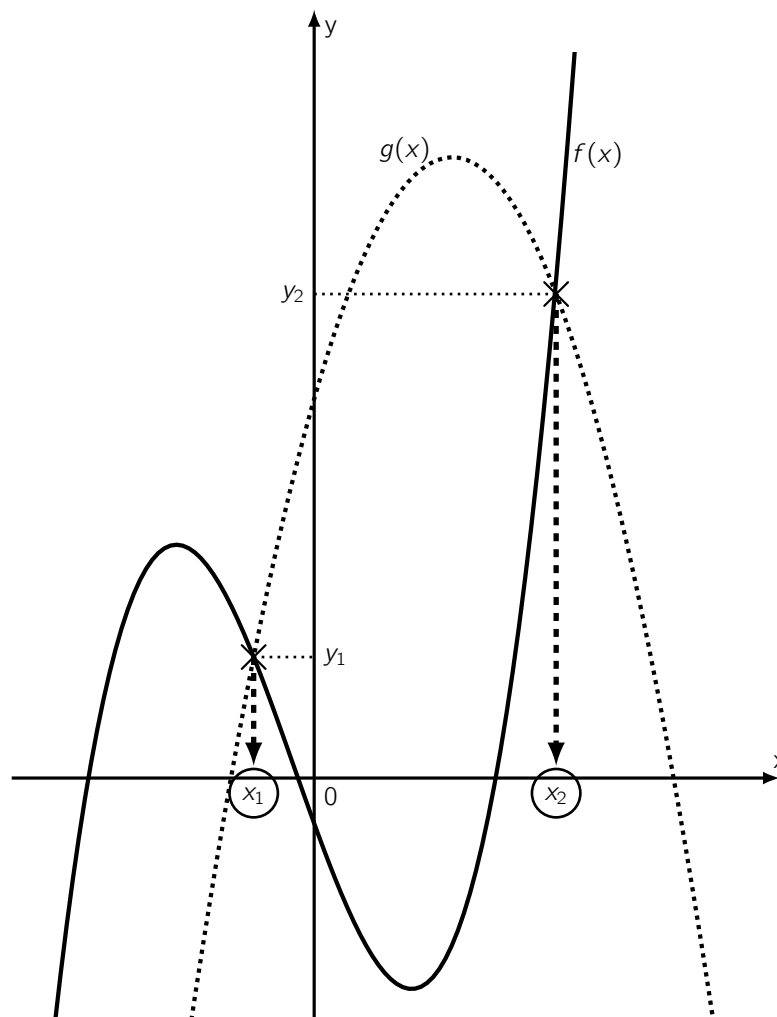
Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$S = (-1; 3); (4; 8)$

8.3.4 Et en cas d'inéquation ?

Soit à déterminer les solutions de $f(x) \leq g(x)$.

Reprenons le graphe de la page précédente.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection (les valeurs sont-elles acceptées?) ;
- vérifier le long de l'axe des abscisses si la condition est respectée (ici : $f(x) \leq g(x)$) ;
- indiquer la solution sous la forme d'intervalle (avec des crochets).

La solution est donc : $S = [x_1; x_2]$

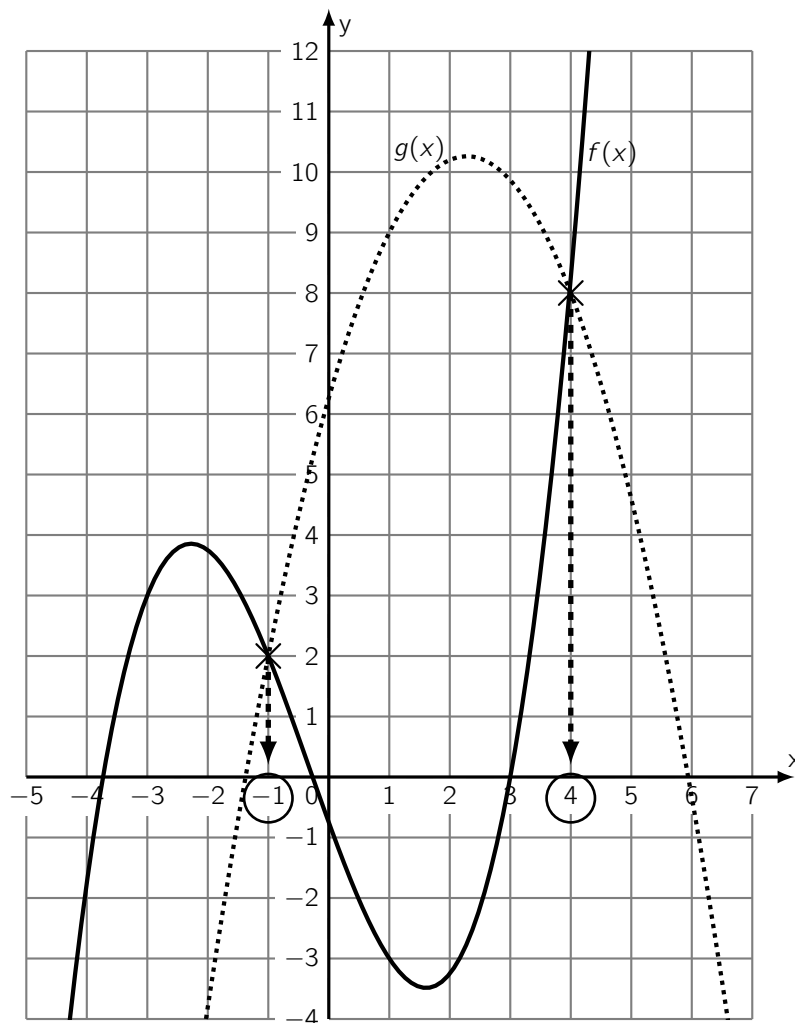
Et si la condition avait été $f(x) \geq g(x)$, la solution aurait été :

$$S =] -\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$$

Exemple

Soit à déterminer les solutions de $f(x) \leq g(x)$.

Reprenons le graphe de la page précédente.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection (les valeurs sont-elles acceptées ?) ;
- vérifier le long de l'axe des abscisses si la condition est respectée (ici : $f(x) \leq g(x)$) ;
- indiquer la solution sous la forme d'intervalle (avec des crochets).

La solution est donc : $S = [-1; 4]$

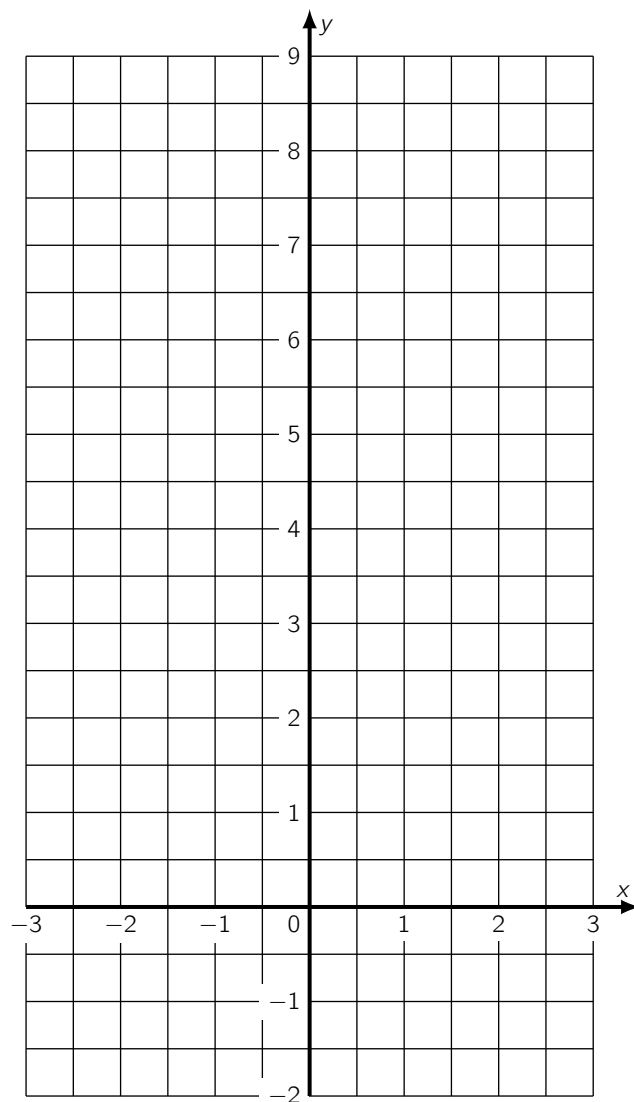
Et si la condition avait été $f(x) \geq g(x)$, la solution aurait été :

$$S =] -\infty; -1] \cup [4; +\infty[$$

8.4 Exercices

Exercice 1

Soit le repère suivant :

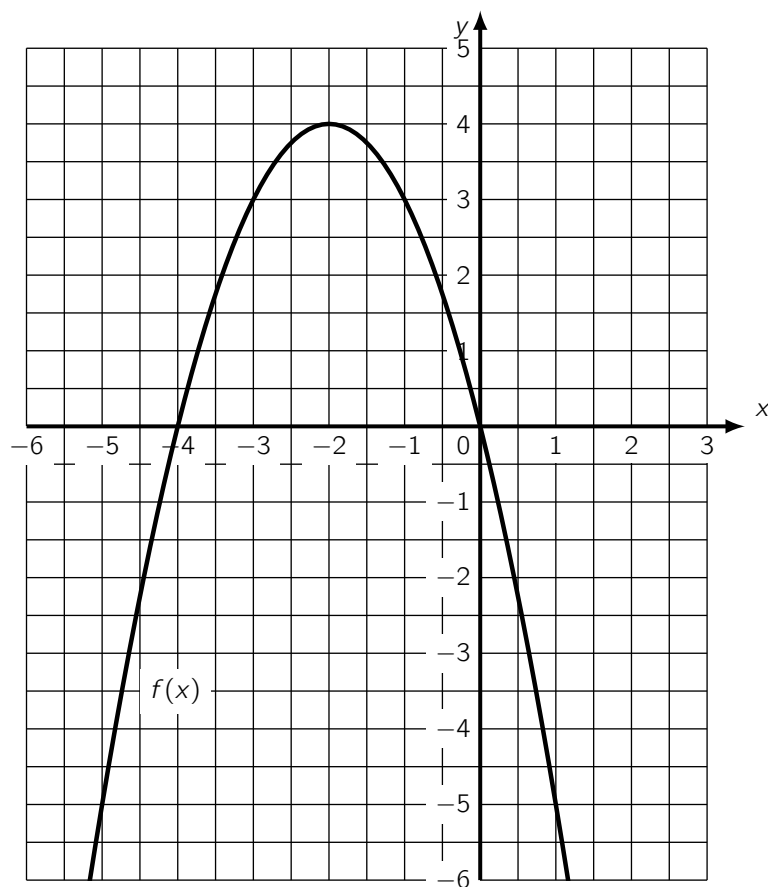


1. Représenter, sur le même repère ci-dessus, les fonctions
 $f(x) = x^2 - 1$
et $g(x) = 0$.
2. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection entre les fonctions f et g , ce qui revient à résoudre $f(x) = g(x)$.

→ $S =$

Exercice 2

Soit le graphe suivant :



Avec : $f(x) = -x^2 - 4x$.

1. Représenter, sur le repère ci-dessus, la fonction $g(x) = -2x - 3$.
2. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection entre les fonctions f et g .

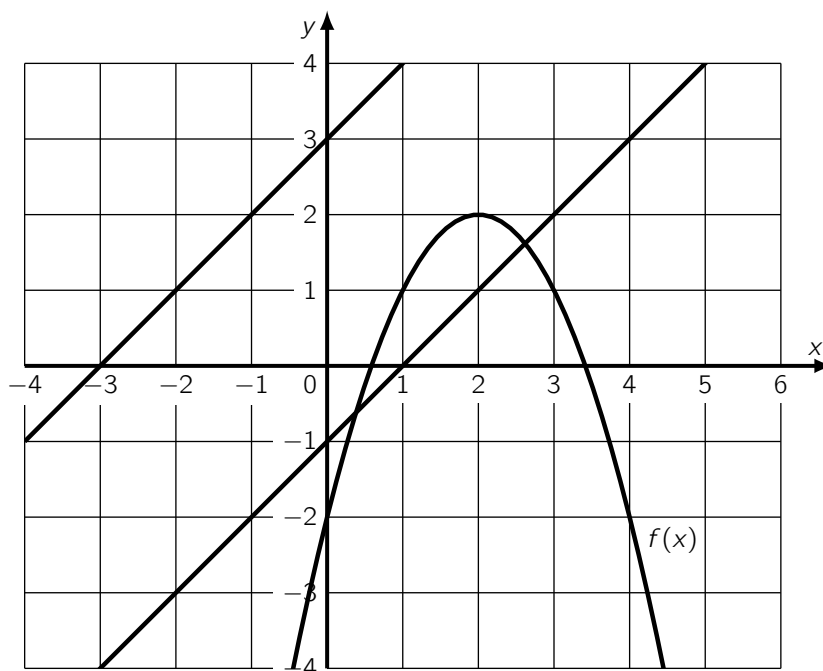
→ $S =$

3. Résoudre graphiquement l'inéquation suivante : $f(x) < g(x)$

→ $S =$

Exercice 3

Soit le graphe suivant :



Avec : $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes (s'il n'y a pas de solution, expliquer pourquoi).

a) $-x^2 + 4x - 2 = 1 \quad \rightarrow S =$

b) $-x^2 + 4x - 2 = -2 \quad \rightarrow S =$

c) $-x^2 + 4x - 2 = 4 \quad \rightarrow S =$

d) $-x^2 + 4x - 2 = x + 3 \quad \rightarrow S =$

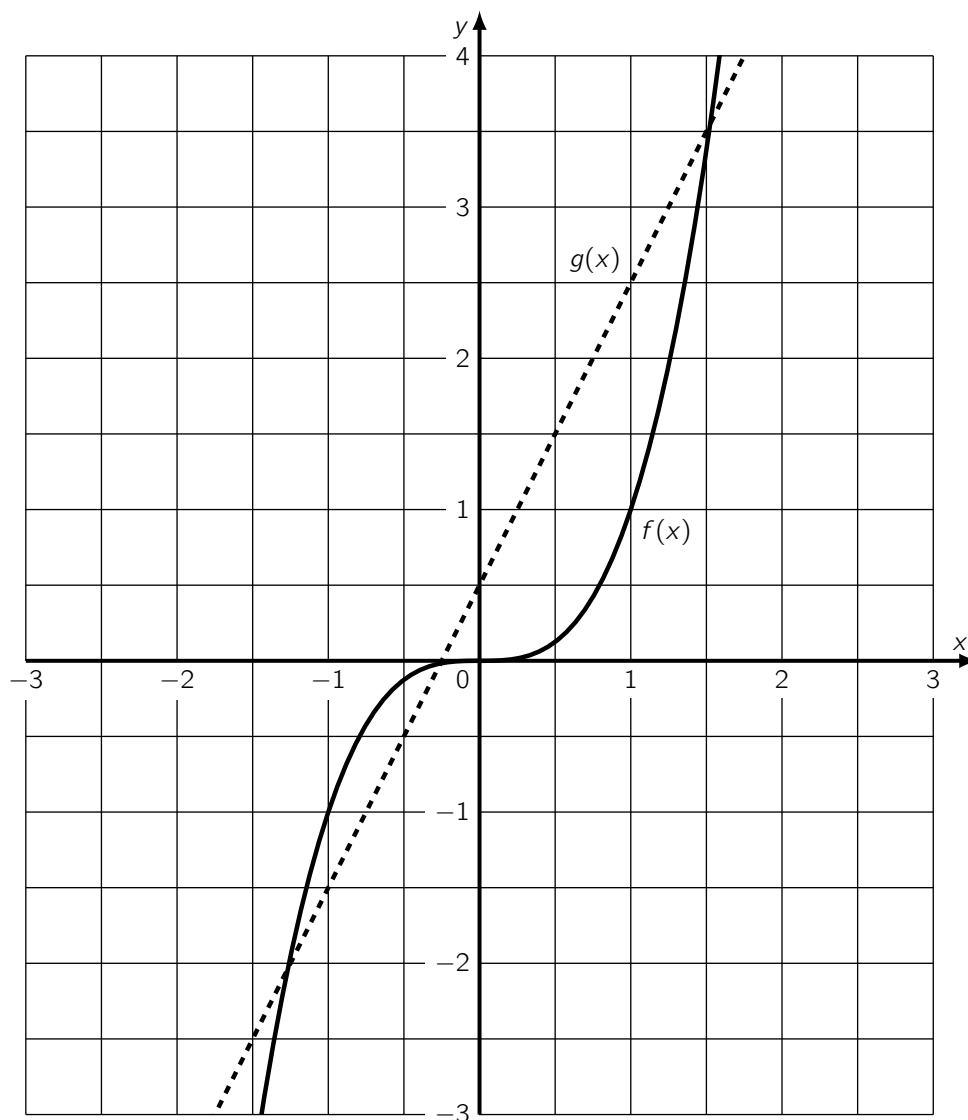
e) $-x^2 + 4x - 2 = x - 1 \quad \rightarrow S =$

f) $-x^2 + 4x - 2 > 1 \quad \rightarrow S =$

g) $-x^2 + 4x - 2 \leq x - 1 \quad \rightarrow S =$

Exercice 4

Soit le graphe suivant :



Avec : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 2x + \frac{1}{2}$.

Résoudre graphiquement les équations suivantes.

a) $x^3 = 1 \quad \rightarrow \quad S =$

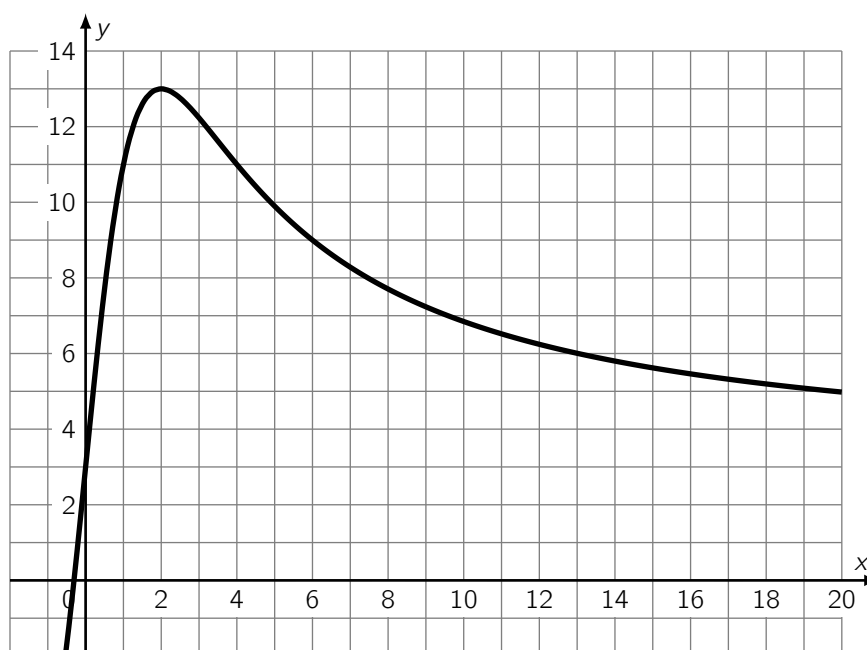
b) $x^3 = 2,5 \quad \rightarrow \quad S =$

c) $x^3 = 2x + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad S =$

Synthèse de l'UAA 1

A) Représentation d'une fonction

Une fonction peut être représentée sous diverses formes :

a) Un graphiqueb) Une formule

Pour obtenir le graphique ci-dessus, on a introduit, dans un logiciel graphique, la formule

$$f(x) = \frac{40x}{x^2 + 4} + 3$$

c) Un tableau de valeurs

Un tableau de valeurs de cette fonction pourrait être :

x	0	1	2	3	4	5	6	10
$f(x)$	3	11	13	12,23	11	9,896	9	6,85

Les valeurs de $f(x)$ peuvent être lues sur le graphique.

Toutes les valeurs de $f(x)$ peuvent être calculées à partir de la formule dans laquelle on remplace x par le nombre choisi.

On a par exemple $f(6) = \frac{40 \cdot 6}{6^2 + 4} + 3 = 9$

B) Définition d'une fonction

Une fonction est une relation qui associe à chaque valeur de la variable x , au plus une (0 ou 1) valeur de y .

La variable x est appelée variable indépendante et la variable y est la variable dépendante.

Pour exprimer que y est une fonction de x , on écrit $y = f(x)$ ou $f : x \rightarrow y = f(x)$

C) Image d'un réel par une fonction

L'image d'un réel a par la fonction f est notée $f(a)$.

Le point $(a; f(a))$ appartient au graphe de la fonction.

Exemple : graphique de la fonction $f : x \rightarrow y = x^2 + 2x - 1$

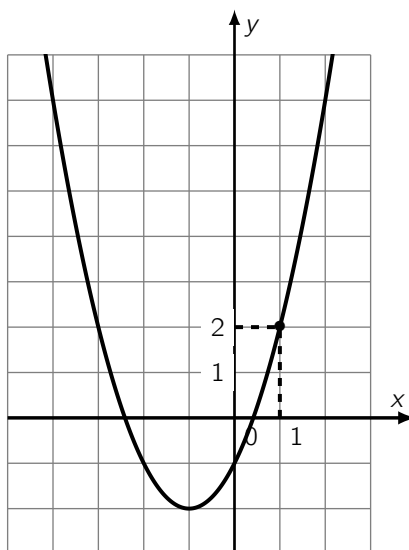


Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	-1	-2	-1	2	7	14

L'image de 1 par la fonction f est 2. On écrit $f(1) = 2$.

Le point $(1; 2)$ appartient au graphique de la fonction.

D) Domaine et ensemble image d'une fonction

Le **domaine d'une fonction** est l'ensemble des valeurs acceptées par cette fonction. Autrement dit, c'est l'ensemble des réels ayant une image par cette fonction.

Il se lit sur l'axe des x et s'exprime sous la forme d'un intervalle.

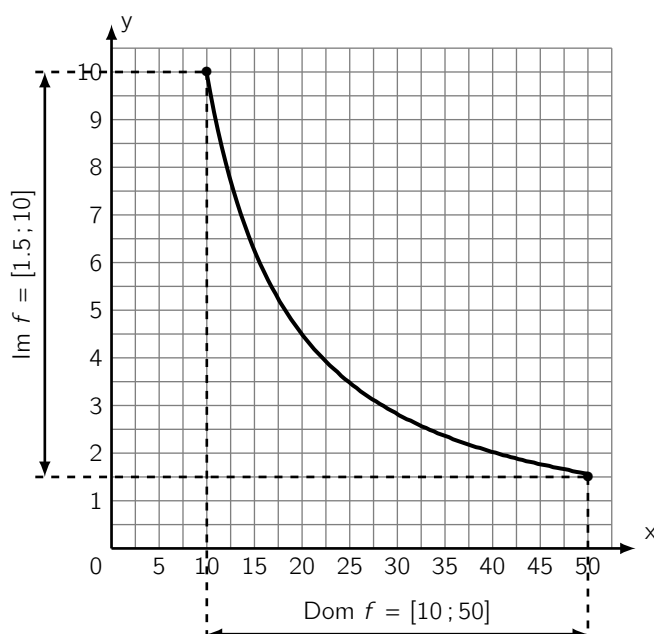
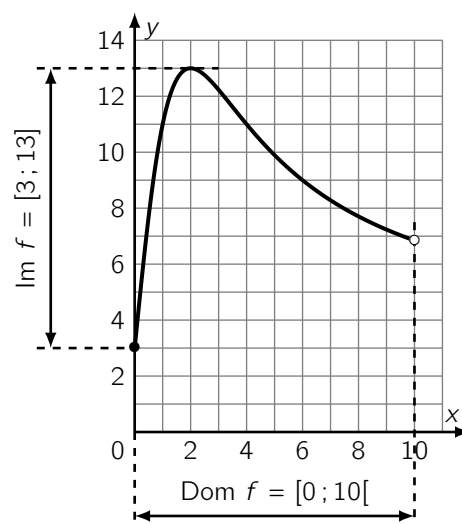
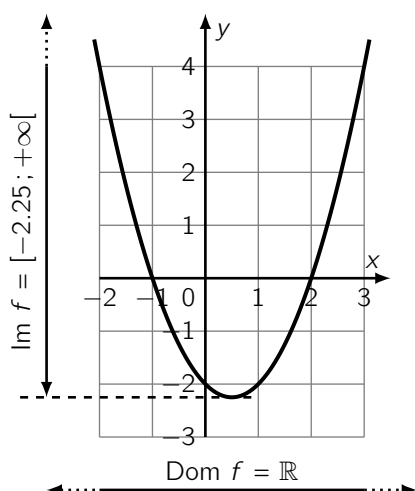
L'**ensemble image d'une fonction** est l'ensemble des réels images par cette fonction.

Il se lit sur l'axe des y et s'exprime sous la forme d'un intervalle.

Remarque : Sur le graphe,

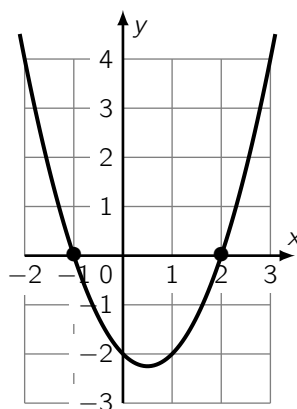
- * un point plein ($\bullet$) signifie que la valeur est comprise et donc que le point appartient bien au graphe de la fonction ;
- * un point creux ($\circ$) signifie que la valeur n'est pas comprise et donc que le point n'appartient pas au graphique de la fonction ;
- * l'absence de point (généralement en bord de graphe) signifie que le graphe continue au-delà de la représentation : cela correspond généralement à $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

Exemples :



E) Racines d'une fonction

Le graphe ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$



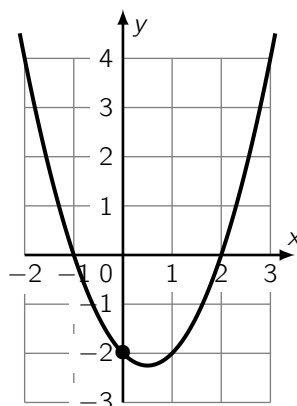
Nous constatons que cette fonction coupe l'axe des x en deux points : en $(-1; 0)$ et en $(2; 0)$.

Les abscisses des points d'intersection du graphe de la fonction avec l'axe x sont appelés **racines** de la fonction.

Les racines de la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$ sont donc -1 et 2 .

F) Ordonnée à l'origine d'une fonction

Le graphe ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$



Cette fonction coupe l'axe des y en un point : en $(0; -2)$.

L'ordonnée du point d'intersection du graphe de la fonction avec l'axe y est appelée **ordonnée à l'origine** de la fonction.

L'ordonnée à l'origine de la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$ est donc -2 .

G) Signe d'une fonction

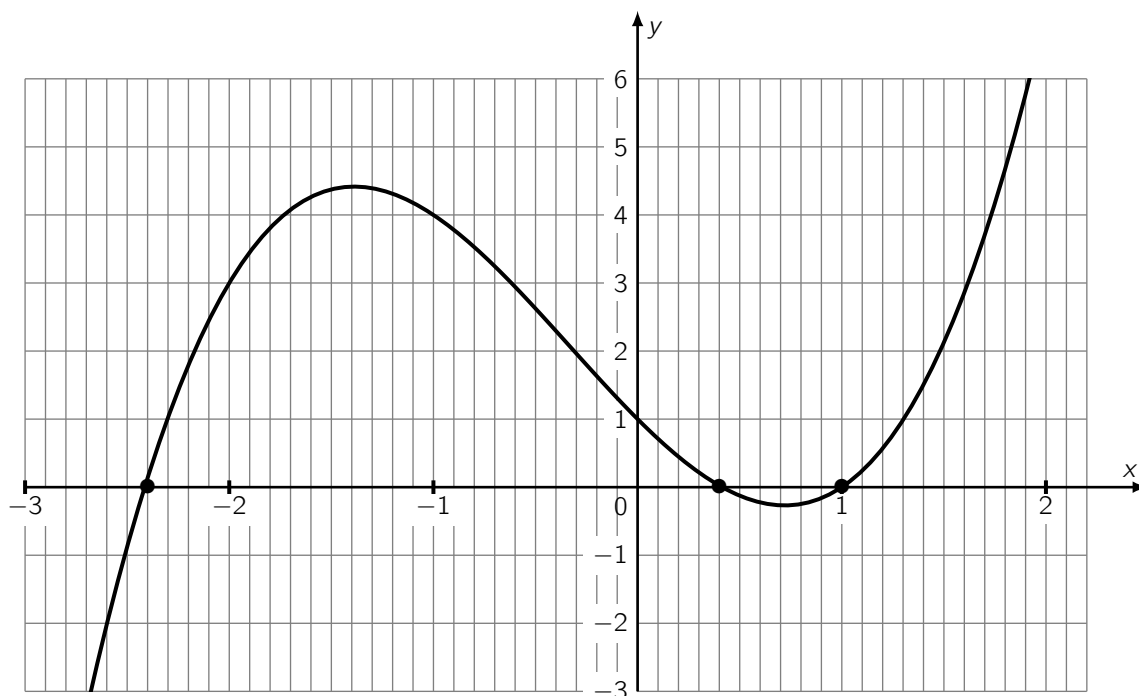
Le **tableau de signe** est une représentation schématisée du signe d'une fonction (c'est-à-dire du signe des ordonnées de la fonction).

Pour le réaliser, il faut :

1. Déterminer le domaine de la fonction ;
2. Déterminer les racines de la fonction ;
3. Indiquer dans un tableau les racines dans l'ordre croissant des abscisses ;
4. Sous les racines, écrire « 0 » ;
5. Entre les « 0 », indiquer « + » si les ordonnées de la fonction sont positives, et « - » si les ordonnées sont négatives.

Exemple :

Le graphe ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$

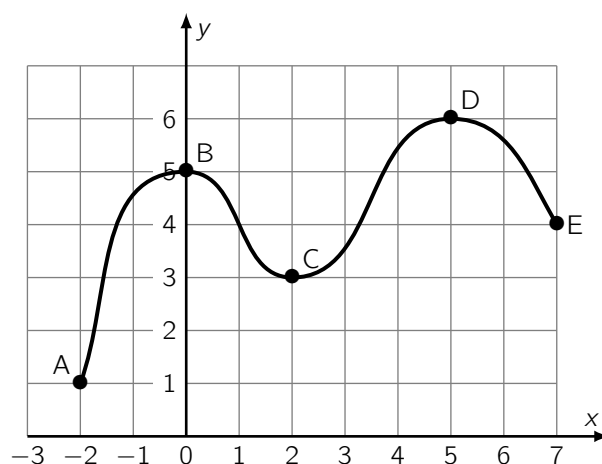


x		-2,4		0,4		1	
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

H) Extrema d'une fonction

- * Une fonction admet un **maximum global** au point P (P étant un point de son domaine) si l'ordonnée de ce point est supérieure à celles de tous les autres points du graphique de la fonction.
- * Une fonction admet un **maximum local** au point P (P étant un point de son domaine) si l'ordonnée de ce point est supérieure à celles des points du graphique de la fonction situés dans son voisinage.
- * Une fonction admet un **minimum global** au point P (P étant un point de son domaine) si l'ordonnée de ce point est inférieure à celles de tous les autres points du graphique de la fonction.
- * Une fonction admet un **minimum local** au point P (P étant un point de son domaine) si l'ordonnée de ce point est inférieure à celles des points du graphique de la fonction situés dans son voisinage.

Exemple :

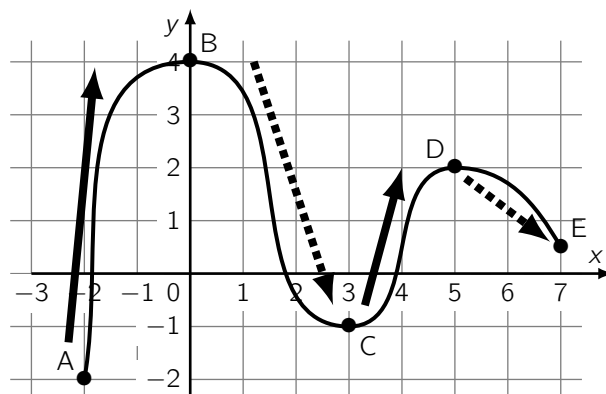


- * A est le *minimum global* de la fonction ;
- * B est un *maximum local* de la fonction ;
- * C est un *minimum local* de la fonction ;
- * D est le *maximum global* de la fonction ;
- * E est un *minimum local* de la fonction.

I) Variation d'une fonction

- * Une fonction est strictement **croissante** sur un intervalle défini si, lorsque x augmente dans cet intervalle, alors **$f(x)$ augmente** ;
- * Une fonction est strictement **décroissante** sur un intervalle défini si, lorsque x augmente dans cet intervalle, alors **$f(x)$ diminue**.

Exemple :



Sur les intervalles...

- * $[A ; B [$, la fonction est *croissante* ($\nearrow$) ;
- * $] B ; C [$, la fonction est *décroissante* ($\searrow$) ;
- * $] C ; D [$, la fonction est *croissante* ($\nearrow$) ;
- * $] D ; E]$, la fonction est *décroissante* ($\searrow$).

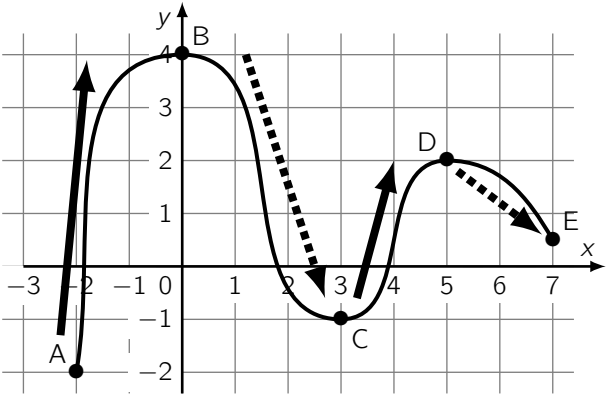
Le **tableau de variation** est une représentation schématique de l'allure d'une fonction.

Pour le réaliser, il faut :

1. Déterminer le domaine de la fonction ;
2. Déterminer les coordonnées des maxima et minima ;
3. Indiquer dans un tableau les coordonnées dans l'ordre croissant des abscisses ;
4. Indiquer les maxima et minima sous leurs coordonnées.

5. Entre ces coordonnées, mettre des flèches indiquant si la fonction est strictement croissante ($\nearrow$) ou strictement décroissante ($\searrow$).

Reprenons l'exemple ci-avant :

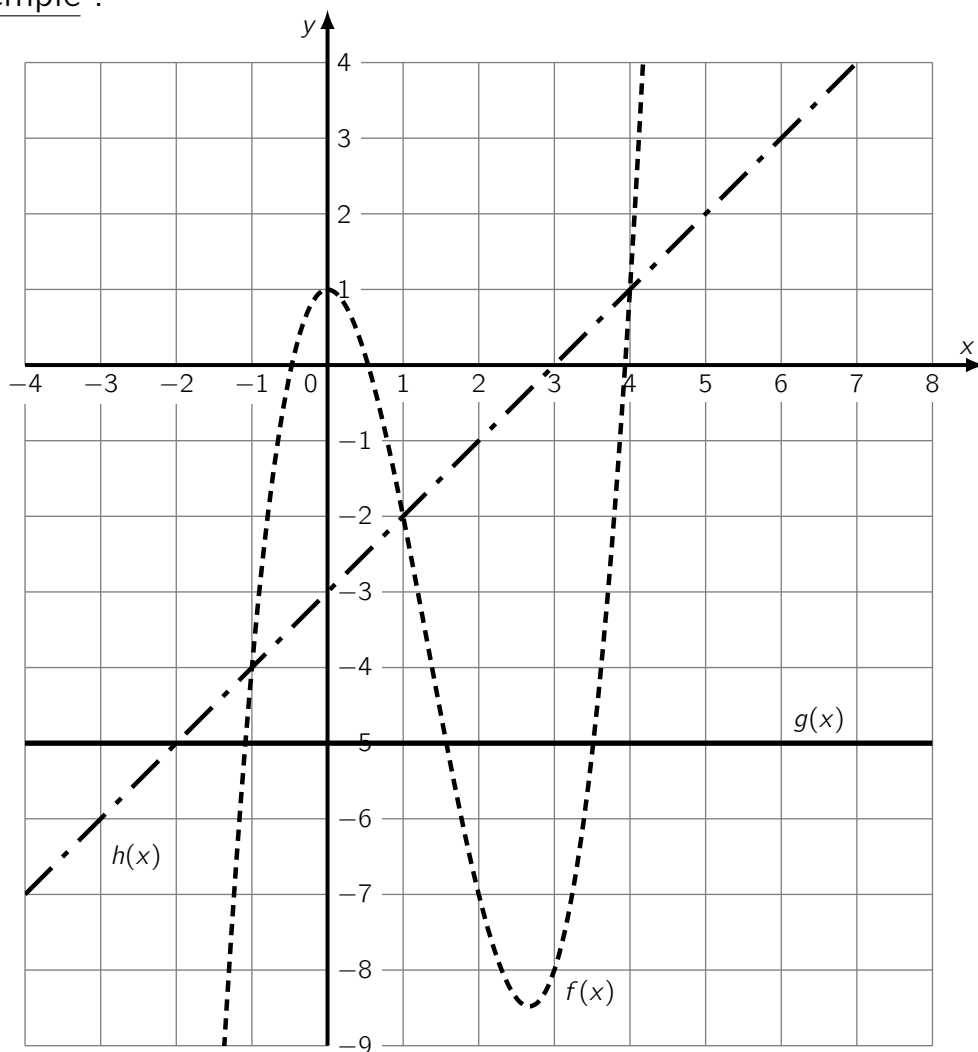


x	-2		0		3		5		7
$f(x)$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0,6

J) Comment résoudre graphiquement une équation/inéquation ?

Les solutions d'une équation de la forme $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des représentations graphiques de ces fonctions.

Exemple :



Avec : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$; $g(x) = -5$ et $h(x) = x - 3$.

- * Les solutions de l'équation $x^3 - 4x^2 + 1 = -5$ sont les points d'intersection entre la courbe qui représente $f(x)$ et celle de la droite $g(x)$.
On écrit $S = \{-1,09; 1,57; 3,51\}$.
- * Les solutions de l'équation $x^3 - 4x^2 + 1 = x - 3$ sont les points d'intersection entre la courbe qui représente $f(x)$ et celle de la courbe qui représente $h(x)$.
On écrit $S = \{-1; 1; 4\}$.
- * Les solutions de l'inéquation $x^3 - 4x^2 + 1 > x - 3$ sont
 $S =]-1; 1[\cup]4; +\infty[$

UAA 2

Modèles de croissance

(Partie 5^e TQ)

Chapitre 1

Rappels

Nous avons vu précédemment la définition d'un graphe (p.72).

Rappelons simplement que pour réaliser un graphe, nous avons besoin de :

- * Un plan ;
- * Des axes linéaires, perpendiculaires, orientés, (généralement) normés et nommés ;
- * Une origine, une échelle sur chaque axe et des points à placer sur le plan.

Chaque point possède des coordonnées notées dans l'ordre chronologique : $(x; y)$, x étant l'abscisse du point et y étant son ordonnée.

Maintenant que nous nous sommes remémoré ce stricte minimum, et comme un schéma vaut mieux que mille mots, passons directement à ce qui nous intéresse.

2.1 Construction d'un tableau de nombres à partir d'une formule

2.1.1 Activité – Distance de freinage (1)

Sur une route sèche et horizontale, la distance de freinage D (en mètres) d'une voiture, à partir du moment où le conducteur freine réellement, est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot c}$$

où

- * v est la vitesse au moment du freinage (en m/s) ;
- * g est l'accélération de la pesanteur ($9,81m/s^2$) ;
- * c est le coefficient de frottement qui dépend de la nature et de la qualité du revêtement. On supposera $c = 0,7$.

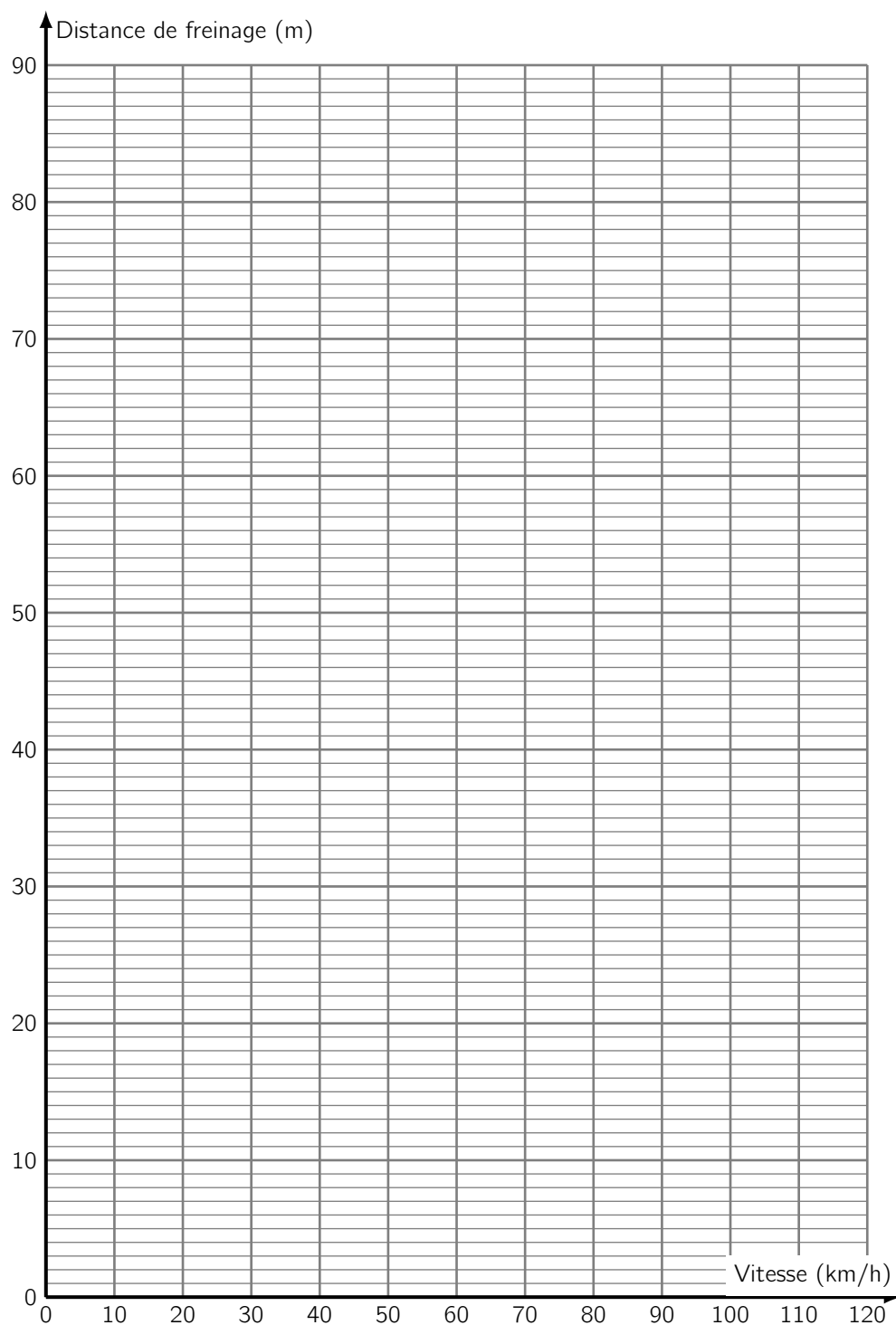
Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au centième près.

Vitesse (km/h)	20	30	50	70	90	120
Vitesse (m/s)						
Distance de freinage (m)						

2.2 Construction d'un graphe à partir d'un tableau de nombres

2.2.1 Activité – Distance de freinage (2)

Sur base du tableau déterminé ci-dessus, réaliser le graphe représentant la distance de freinage (en mètres) du véhicule en fonction de sa vitesse (en km/h).



2.3 Exercices

Exercice 1

Représenter graphiquement les fonctions ci-dessous sur des feuilles séparées.

Choisir *minimum* 3 fonctions, au choix, de la série ci-dessous.

1. $f(x) = x^2 - 12x + 27$

2. $f(x) = x^2 + 3x - 4$

3. $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$

4. $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$

5. $f(x) = x^2 - 8x + 15$

6. $f(x) = -x^2 - 2x + 20$

7. $f(x) = x^2 - 4x - 5$

8. $f(x) = x^2 - 5x + 4$

9. $f(x) = (x - 3)^2 - 25$

10. $f(x) = (2 - x)^2 - 9$

Les fonctions de référence

Certaines des fonctions présentes dans ce cours le sont à titre de rappel.

3.1 Fonction constante

3.1.1 Définition

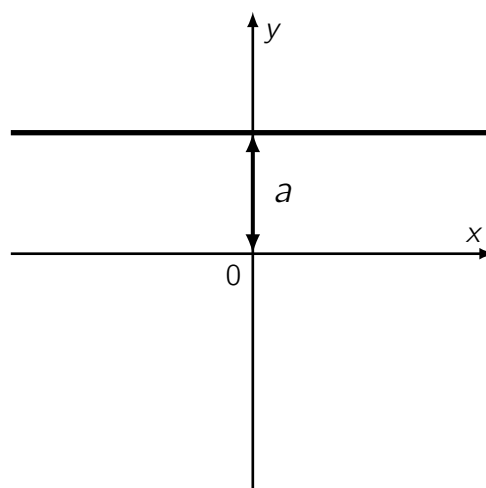
* Une fonction constante est de la forme

$$f(x) = a \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}.$$

* dans la littérature, on retrouve plutôt la notation suivante :

$$f(x) = \text{constante} \quad \text{ou encore} \quad f(x) = c^{ste}$$

3.1.2 Représentation graphique



3.2 Fonction linéaire

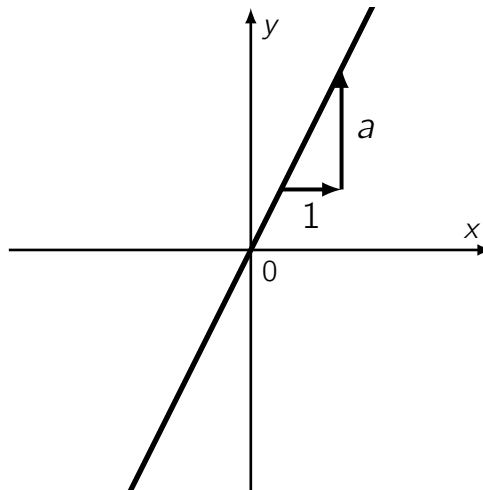
3.2.1 Définition

* Une fonction linéaire est de la forme

$$f(x) = ax \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

3.2.2 Représentation graphique

Dans la fonction $f(x) = ax$, le coefficient a est appelé *coefficient angulaire* ou encore *coefficient directeur* de la droite.



3.3 Fonction affine

3.3.1 Définition

* Une fonction du premier degré (à coefficients réels) est de la forme

$$f(x) = ax + b \quad \text{où} \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

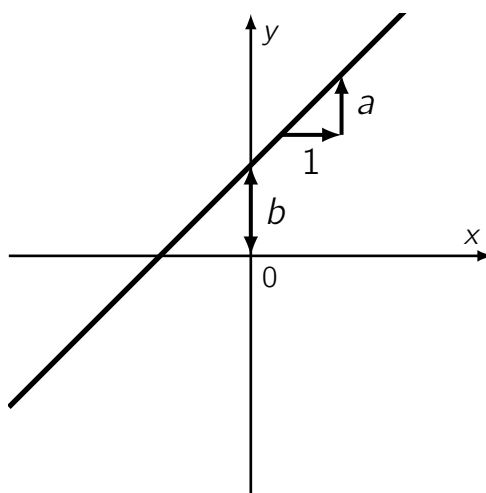
* Remarque : On retrouve assez souvent dans la littérature les notations suivantes :

$$f(x) = mx + p \quad \text{où} \quad m \text{ et } p \in \mathbb{R}, \text{ avec } m \neq 0$$

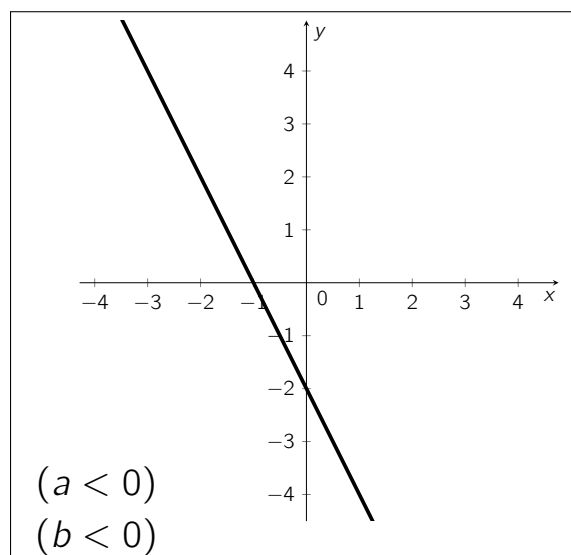
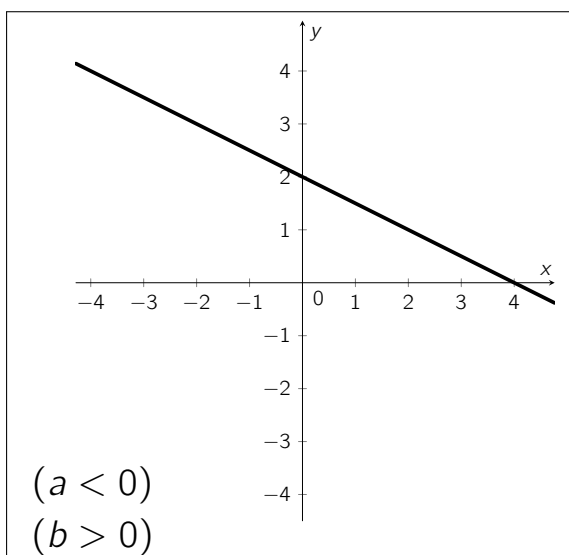
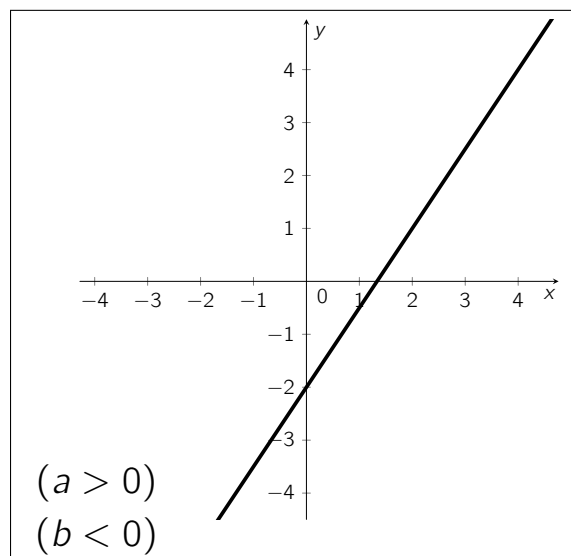
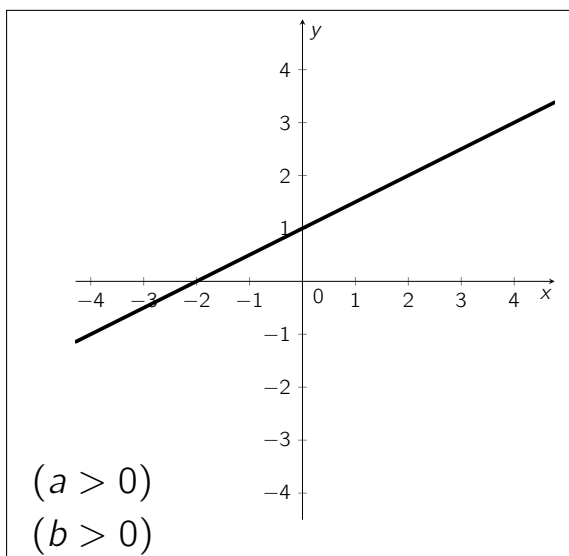
ou encore $f(x) = kx + t \quad \text{où} \quad k \text{ et } t \in \mathbb{R}, \text{ avec } k \neq 0.$

3.3.2 Représentation graphique

Dans la fonction $f(x) = ax + b$, le coefficient a est appelé *coefficient angulaire* ou encore *coefficient directeur* de la droite. Le coefficient b est l'*ordonnée à l'origine* de la droite.



Quatre situations sont possibles :



3.4 La fonction de degré 2 : la parabole

3.4.1 Définition

- * La parabole est une fonction polynôme du second degré (à coefficients réels) et est de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{où} \quad a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

- * Le *discriminant* de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, noté Δ , est le nombre défini par

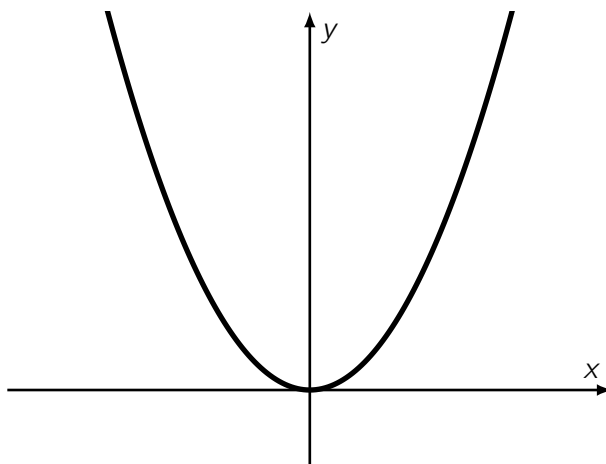
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Remarque : La *fonction polynôme du second degré* peut aussi être appelée *fonction trinôme du second degré*. Par commodité, nous l'appelons généralement *fonction du second degré*.

3.4.2 Représentation graphique

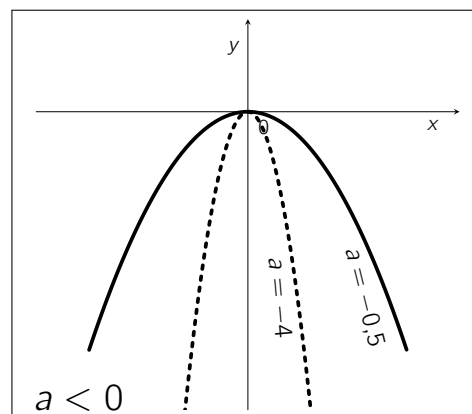
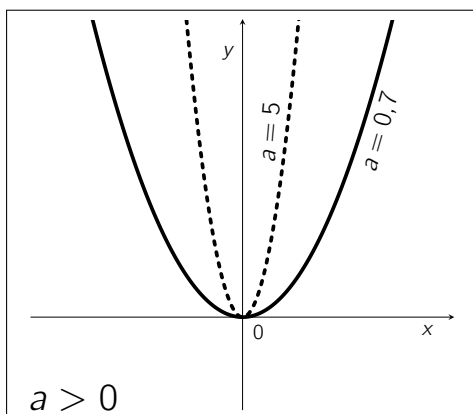
Voici l'allure générale de la fonction lorsque celle-ci est de la forme

$$f(x) = ax^2$$



Nous constatons que, dans ce cas particulier où la fonction s'écrit sous la forme $f(x) = ax^2$, la courbe possède l'axe des y comme axe de symétrie et l'origine du repère $(0; 0)$ comme sommet.

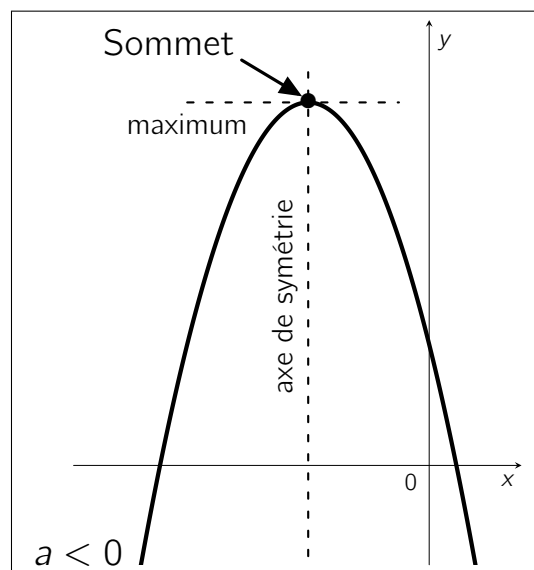
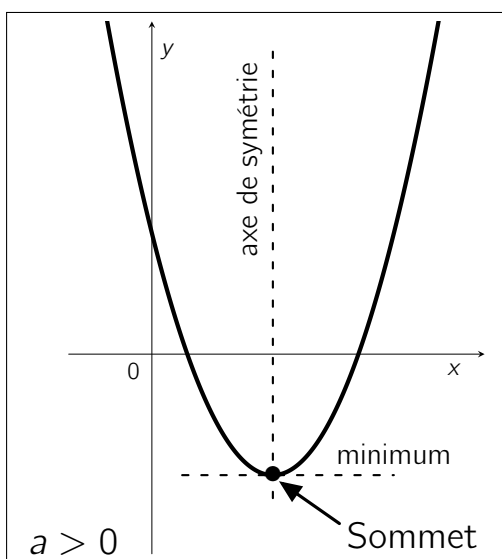
Si l'on modifie le coefficient a , comment la courbe évoluera-t-elle ?



On constate que plus le coefficient a est grand en valeur absolue, plus la courbe se rapproche de l'axe vertical. À l'inverse, plus le coefficient a est petit en valeur absolue, plus la courbe s'éloigne de l'axe vertical.

De manière plus générale, lorsque la fonction s'écrit sous la forme

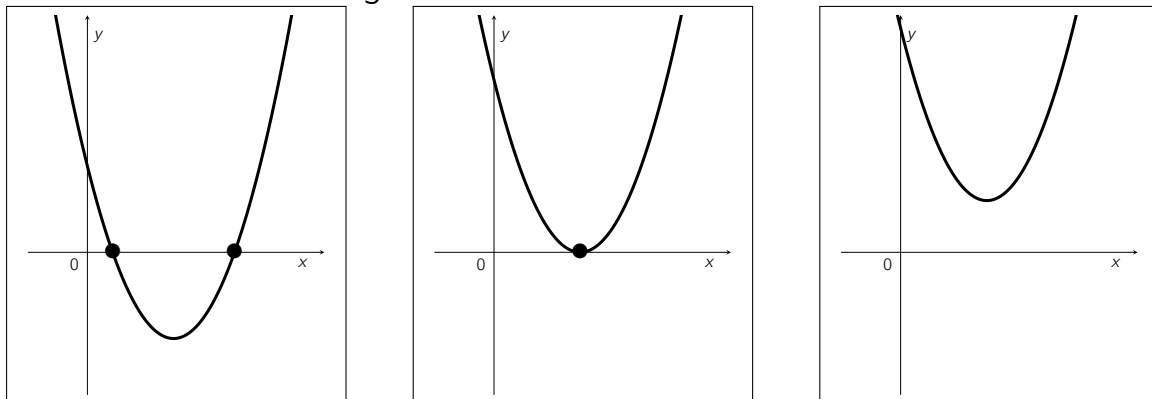
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



3.4.3 Résolution

Comme pour toute fonction, nous pouvons déterminer les zéros de la fonction parabole.

Il existe trois cas de figure ⁽¹⁾ :



Nous allons déterminer les coordonnées du/des points d'intersection entre la fonction et l'axe des x en résolvant l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (dans $\mathbb{R}$) ⁽²⁾. Afin de pouvoir résoudre cette équation, il faut distinguer les trois cas possibles (selon la valeur de Δ qui, je le rappelle, vaut $b^2 - 4ac$) :

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes, x_1 et x_2 , données par les formules ⁽³⁾ :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution double, $x_1 = x_2$, généralement notée x_0 , donnée par la formule :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

(1). Les trois cas de figure valent ici pour $a > 0$ mais il existe également trois cas de figure pour $a < 0$

(2). Nous utiliserons cette méthode dans la résolution des exercices qui se trouvent en fin de chapitre.

(3). Pour les plus curieux d'entre vous, la démonstration des formules se trouve, à titre d'information (donc à ne pas connaître), en page 150.

3.4.4 Démonstration – pour information

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

- Supposons que $\Delta > 0$, alors $\sqrt{\Delta}$ existe, et :

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\
 &= a \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

Puisqu'un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, alors on en déduit que

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &\text{et} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}
 \end{aligned}$$

- Supposons que $\Delta = 0$, alors :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

Entraîne directement la solution double

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- Supposons que $\Delta < 0$, alors :

$$ax^2 + bx + c = a \left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{>0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0} \right) \begin{matrix} (\rightarrow < 0) \\ (\rightarrow > 0) \end{matrix} > 0$$

On en déduit donc que la fonction $ax^2 + bx + c = 0$ ne possède aucune solution dans $\mathbb{R}$.

3.4.5 Applications

Lancer de projectiles



Antennes



3.5 La fonction de degré 3

3.5.1 Définition

* Une équation du troisième degré (à coefficients réels) est une équation de la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{où} \quad a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

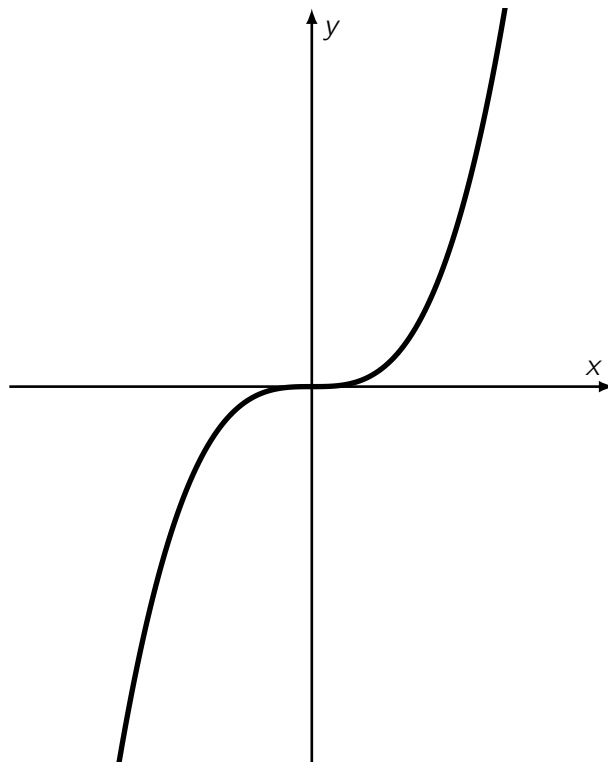
L'étude algébrique de la fonction du troisième degré est relativement complexe. Nous nous contenterons donc de son étude graphique tout en nous limitant à la fonction de base

$$f(x) = ax^3 \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

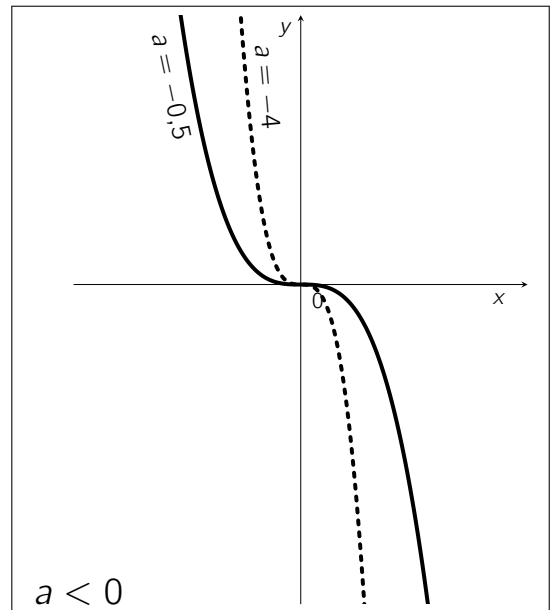
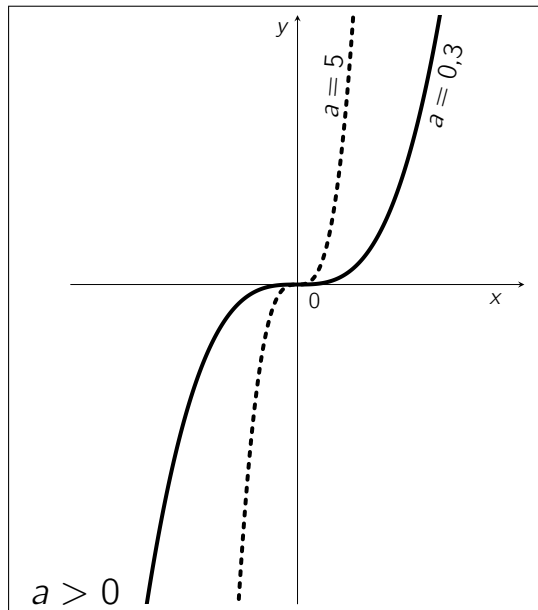
3.5.2 Représentation graphique

Voici l'allure générale de la *fonction cube* lorsque celle-ci est de la forme

$$f(x) = ax^3$$



Si l'on modifie le coefficient a , comment la courbe évoluera-t-elle ?



Les mêmes constatations peuvent être faites que pour la fonction de degré 2 : plus le coefficient a est grand en valeur absolue, plus la courbe se rapproche de l'axe vertical. À l'inverse, plus le coefficient a est petit en valeur absolue, plus la courbe s'éloigne de l'axe vertical.

3.6 La fonction inverse

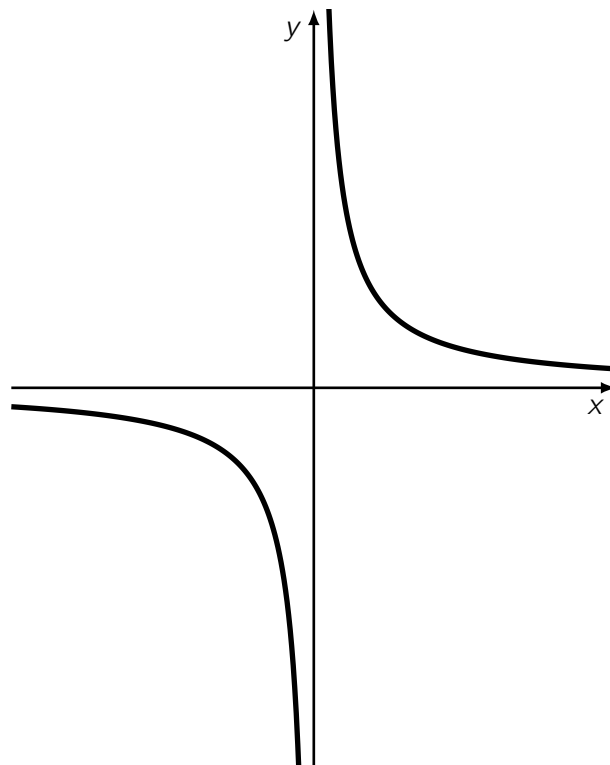
3.6.1 Définition

* La fonction inverse est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{où} \quad x \neq 0.$$

3.6.2 Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction inverse est une courbe que l'on appelle hyperbole.



3.7 La fonction racine carrée

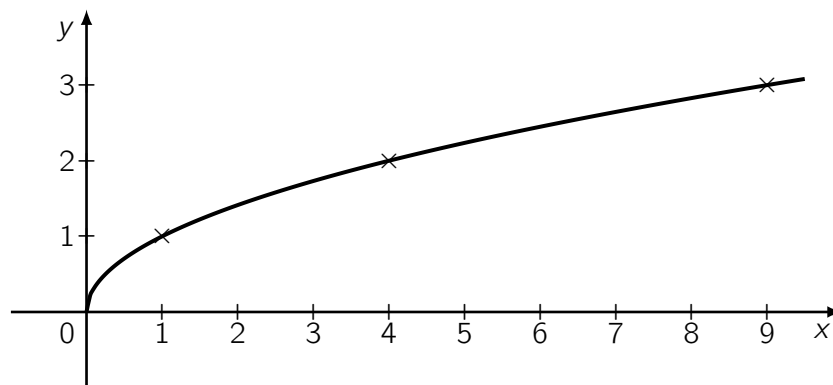
3.7.1 Définition

* La fonction racine carrée est une fonction de la forme

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{où} \quad x \geq 0.$$

3.7.2 Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction racine carrée est une courbe que l'on représente comme suit :



3.8 La fonction puissance

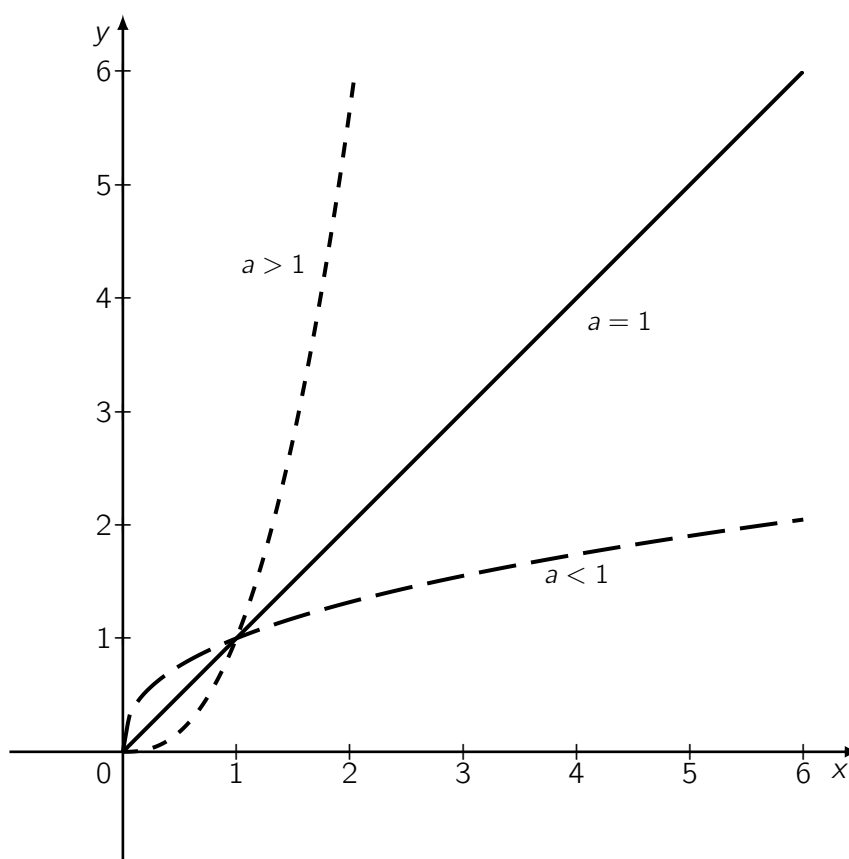
3.8.1 Définition

* La fonction puissance est une fonction de la forme

$$f(x) = x^a \quad \text{où} \quad a \geq 0.$$

3.8.2 Représentation graphique

Nous pourrions même dire qu'il n'existe non pas une fonction puissance mais des fonctions puissances. Le graphe suivant met bien cela en évidence.

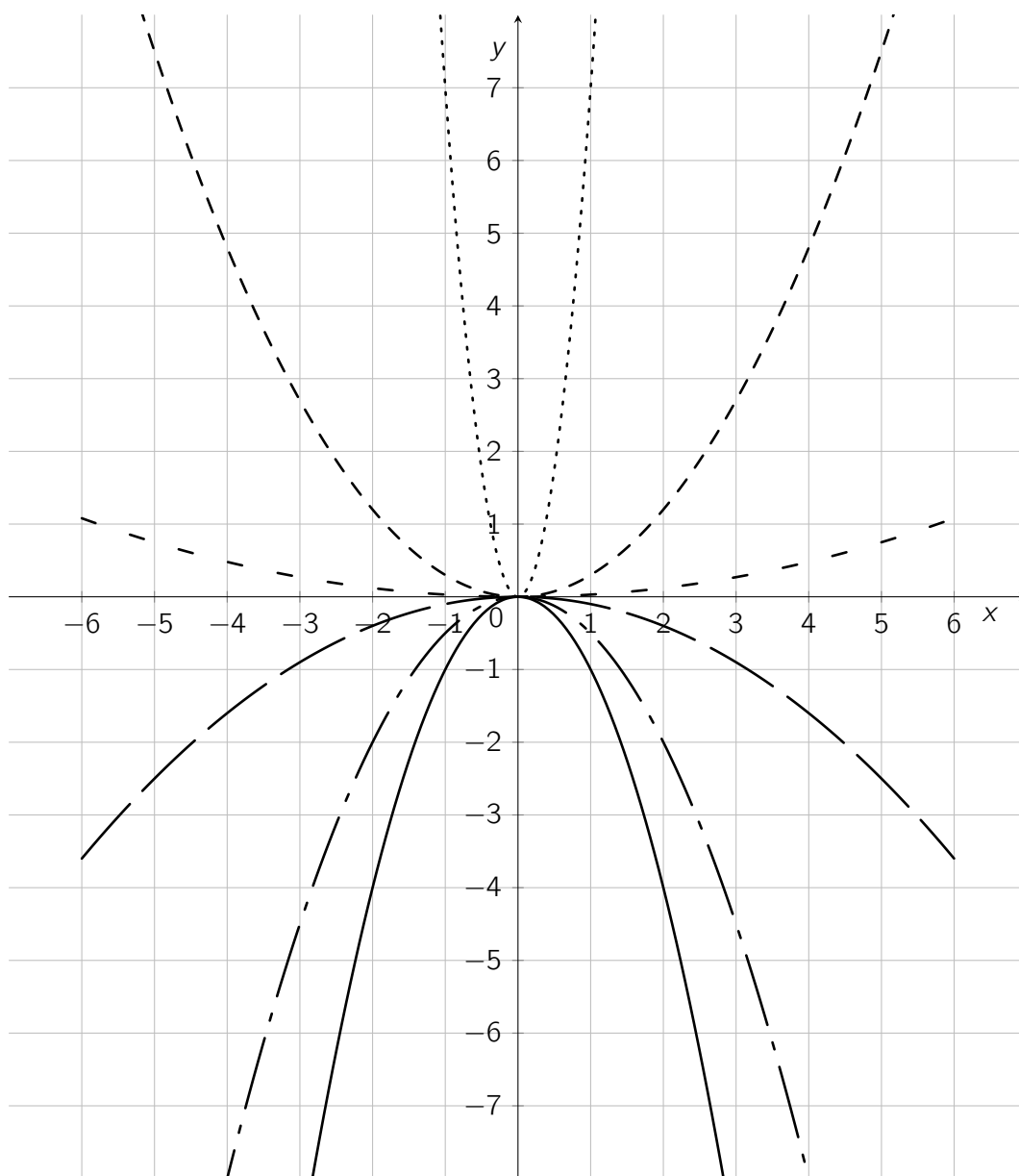


3.9 Exercices

Exercice 1

Voici une série de courbes représentant les fonctions $f(x) = ax^2$ avec diverses valeurs de a .

Il est demandé d'écrire à côté de chaque courbe la valeur de a qui lui correspond.



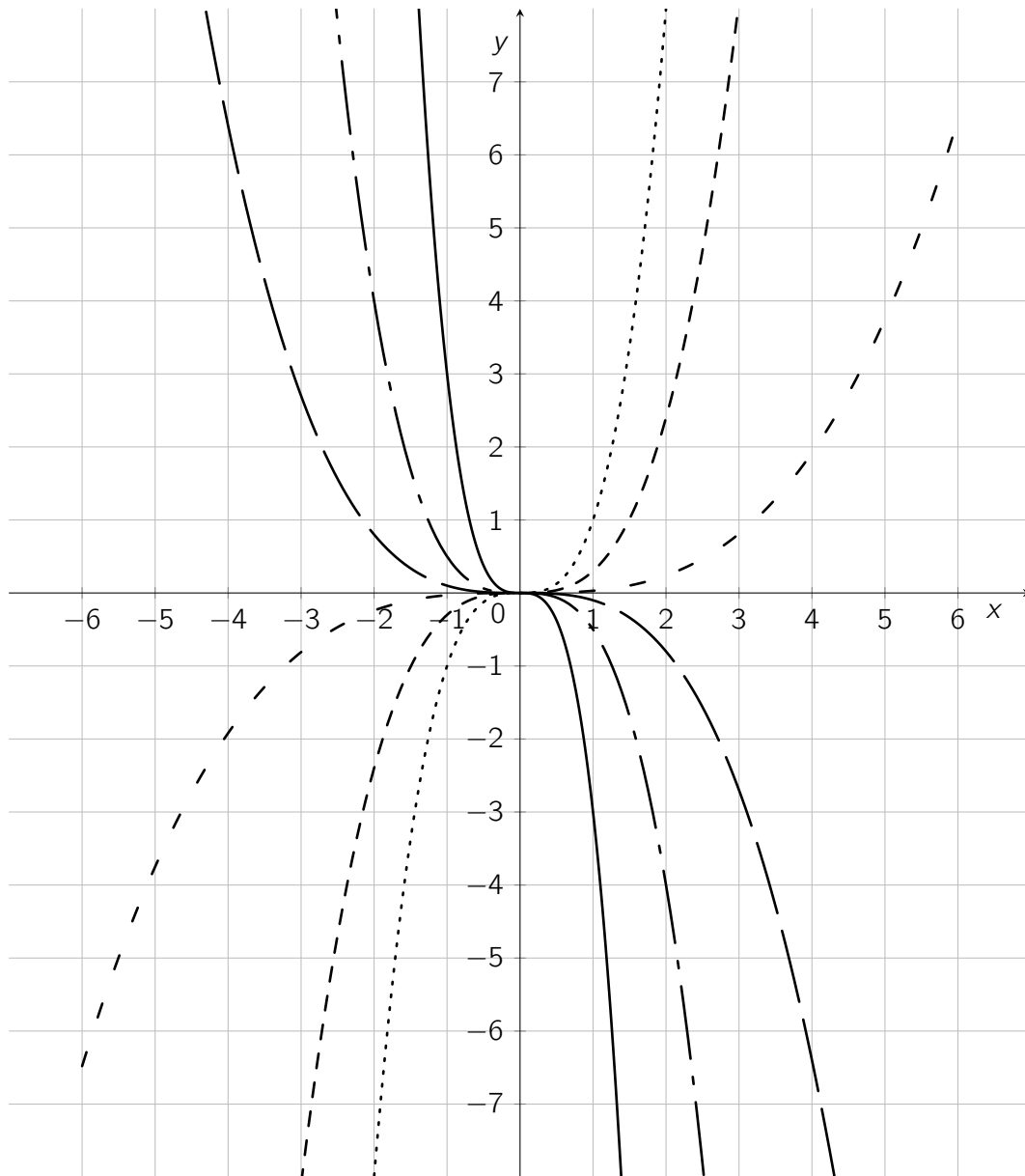
Les différentes valeurs de a sont :

-1 -0,5 7 0,03 -0,1 0,3

Exercice 2

Voici une série de courbes représentant les fonctions $f(x) = ax^3$ avec diverses valeurs de a .

Il est demandé d'écrire à côté de chaque courbe la valeur de a qui lui correspond.



Exercice 3

Résoudre les équations suivantes (en réduisant au même dénominateur).

1. $x - \frac{1}{x} = 0$

2. $\frac{x}{3} + \frac{2}{x+4} = 1$

3. $\frac{2x+3}{5x-1} = 2$

4. $\frac{2x+3}{5x-1} = 2x$

5. $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$

6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2$

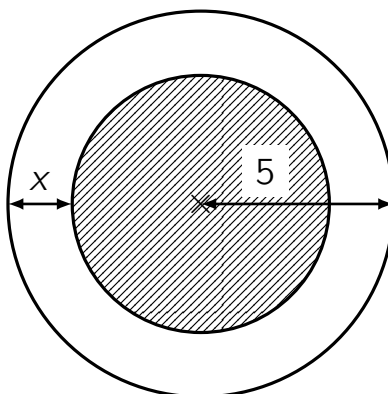
7. $\frac{(4x-1)^2}{3} = x^2 + 1$

8. $\frac{7x}{x-2} - \frac{5}{3-x} = 0$

9. $\frac{3x}{x+1} - \frac{10x}{x-2} + \frac{9}{7} = 1$

Exercice 4

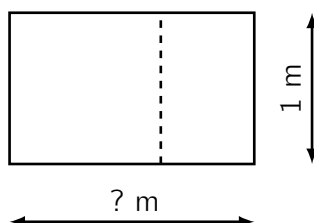
À l'intérieur d'un parterre circulaire dont le rayon vaut 5 mètres, on trace un sentier en forme de couronne.



1. Peut-on dire que l'aire du sentier est proportionnelle à sa largeur ? Écrire la formule qui justifiera la réponse.
2. Quelle doit être la largeur du sentier pour que son aire (aire blanche) soit égale à l'aire hachurée ?
3. Représenter graphiquement l'évolution des aires (blanche et hachurée) en fonction de x . Que constate-t-on ?

Exercice 5

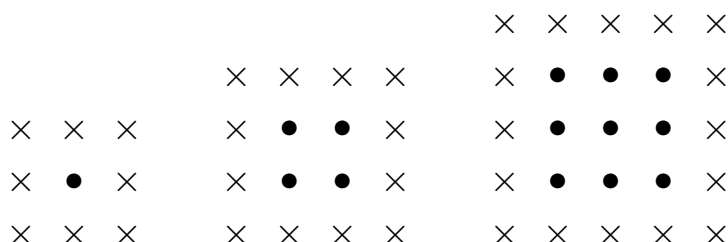
On dit qu'un rectangle est un *rectangle d'or* si, lorsqu'il est coupé en un carré et un rectangle, le rectangle obtenu est semblable au premier (préservation du rapport des côtés).



1. Déterminer la longueur d'un rectangle d'or dont la largeur mesure 1 mètre.
2. Comment appelle-t-on ce nombre bien célèbre ?

Exercice 6

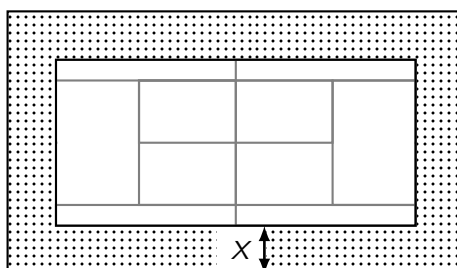
Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de les protéger contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Déterminer le nombre minimum de rangées (n) pour lequel il y a plus de pommiers ($\bullet$) que de conifères ($\times$).



Pour ce faire, répondre aux questions suivantes :

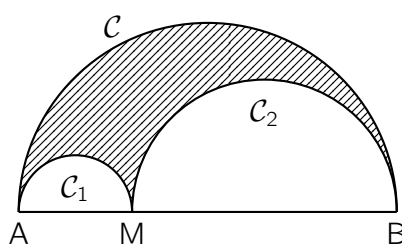
1. Réaliser un tableau comprenant 3 lignes : le nombre de rangées, le nombre de pommiers et le nombre de conifères. Ce tableau permettra de répondre aisément aux deux questions suivantes.
2. Quelle est la relation entre le nombre de rangées et le nombre de pommiers ($\bullet$) ?
3. Quelle est la relation entre le nombre de rangées et le nombre de conifères ($\times$) ?
4. Calcule le nombre minimum de rangées de pommiers que le fermier doit planter pour avoir plus de pommiers que de conifères.

Exercice 7



Voici un terrain de tennis standard dont les dimensions sont de 23,77 m de long pour 10,97 m de large. Je souhaite construire une zone pour les ramasseurs de balles, autour du terrain, de largeur constante x et dont l'aire est égale à celle du terrain.
Calculer la largeur x de cette zone.

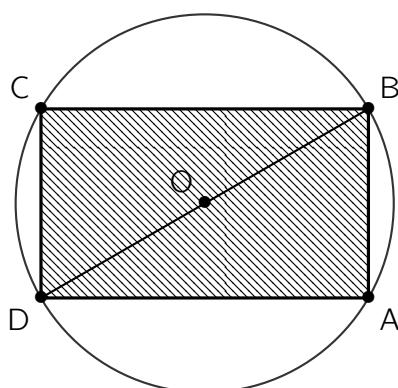
Exercice 8



$[AB]$ est un segment, $AB=10$ cm.
 $\mathcal{C}$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$. M est un point de $[AB]$.
 $\mathcal{C}_1$ est le demi-cercle de diamètre $[AM]$. $\mathcal{C}_2$ est le demi-cercle de diamètre $[MB]$.
Le domaine colorié s'appelle un arbel.
On demande d'étudier les variations de l'aire de l'arbel lorsque M parcourt $[AB]$.

Indice : Déterminer la formule de l'aire de l'arbel en fonction de la distance AM (que l'on appellera x par facilité).

Exercice 9



Déterminer les dimensions d'un rectangle de périmètre 34 cm inscrit dans un cercle de 13 cm de diamètre.

Exercice 10

Lors d'un feu d'artifice, chaque fusée explose quand elle atteint, au cours de sa trajectoire, sa hauteur maximale.

La trajectoire d'une fusée pyrotechnique peut être modélisée par la fonction suivante :

$$f(x) = -0,15x^2 + 5,7x$$

L'unité utilisée est le mètre.

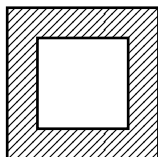
1. Réaliser le graphe de la fonction ci-dessus ;
2. Déterminer graphiquement le maximum de la fonction $f(x)$ ainsi que son x_{max} correspondant ;
3. Vérifier par le calcul les résultats obtenus au point précédent ;
4. À quelle hauteur la fusée explose-t-elle ?

Exercice 11

Un terrain rectangulaire de 26 mètres sur 30 mètres est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire du trottoir est de 240 m², quelle est sa largeur ?

Exercice 12

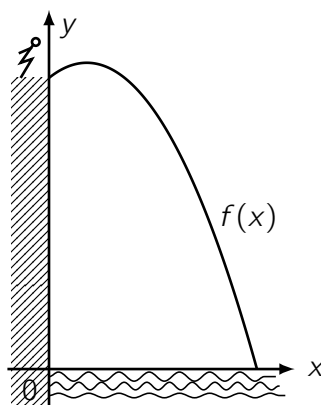
Le grand carré est de côté 1 mètre. Déterminer la largeur constante de la bande hachurée, sachant qu'elle a la même aire que le carré blanc intérieur.



Exercice 13

Un plongeon du haut d'une falaise est modélisé par une parabole qui, dans le repère ci-dessous, est la représentation graphique de la fonction $f(x)$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -0,2x^2 + 0,8x + 15,4$$



L'unité utilisée est le mètre.

$f(x)$ désigne ainsi la hauteur, en mètres, du plongeur par rapport au niveau de la mer en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètres.

1. Quelle est la hauteur de la falaise ?
2. À quelle distance de la falaise le plongeur touche-t-il la surface de l'eau ?
3. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le plongeur ?

Exercice 14

Un sol est recouvert de 500 dalles carrées. Si l'on avait utilisé des dalles 5 cm plus longues et 5 cm plus larges, il en aurait fallu 320 pour recouvrir la même surface du sol. Quelles sont les dimensions des premières dalles ?