

Guy DOTREMONT

Cours de mathématique

6^e TQ

2 périodes par semaine

2023 – 2024

Table des matières

UAA 2 : Modèles de croissance, partie 6 TQ	7
1 Les suites arithmétiques	7
1.1 Activité – La dune (1)	7
1.2 Définition	8
1.3 Calcul de u_n	8
1.4 Généralisation	9
1.5 Activité – La dune (2)	9
1.6 Calcul d'une somme	9
1.7 Exemples	11
1.8 Exercices	12
2 Les suites géométriques	14
2.1 Activité – Triangle de Sierpiński (1)	14
2.2 Définition	15
2.3 Calcul de u_n	15
2.4 Généralisation	16
2.5 Activité – Triangle de Sierpiński (2)	16
2.6 Calcul d'une somme	17
2.7 Exemples	19
2.8 Exercices	21
2.9 Exercices S.A. / S.G.	23
3 Les fonctions puissance et exponentielle	30
3.1 Activité – La feuille de papier	30

3.2	Fonction exponentielle	31
3.2.1	Exemple de fonction puissance	32
3.2.2	Exemple de fonction exponentielle	32
3.3	Représentation graphique	32
3.4	Constatations / recherche	33
3.5	Activité – Triangle de Sierpiński (3)	33
4	Les logarithmes décimaux	35
4.1	Introduction	35
4.1.1	L'acidité d'une solution aqueuse	35
4.1.2	La magnitude d'un tremblement de terre	35
4.1.3	Le niveau sonore	36
4.2	Comment faisait-on avant les calculatrices scientifiques ? .	37
4.3	Logarithmes décimaux	38
4.3.1	Activités - Puissances et logarithmes	38
4.3.2	Enfin, la réponse !	41
4.3.3	Un peu de pratique	42
4.4	Constatations	43
4.5	Définition	43
4.6	Représentation graphique	43
4.7	Propriétés des logarithmes	44
4.7.1	Logarithme d'un produit	44
4.7.2	Logarithme d'un quotient	44
4.7.3	Logarithme d'une puissance	44
4.7.4	Logarithme d'une racine	44
4.8	Exercices	45
5	Introduction aux mathématiques financières	49
5.1	Intérêts simples et composés	49
5.2	Définitions	49
5.3	Différence entre intérêts simple et composé	50
5.3.1	Intérêts simples	50
5.3.2	Intérêts composés	50
5.4	Intérêts simples	50
5.4.1	Activité – Alexandra vs Audrey	50

5.4.2	Formules fondamentales	51
5.5	Exercices	52
5.6	Intérêts composés	55
5.6.1	Activité – Bons de croissance	55
5.6.2	Formules fondamentales	57
5.7	Exercices	58
6	Différents types de croissance	61
6.1	Croissance liée aux types d'intérêts	61
6.1.1	Activité – Graphique	61
6.2	Exercices	64
	UAA 4 : Probabilité	66
1	Bref historique	66
2	Préambules	68
2.1	Exemple – Dé à 6 faces	69
2.2	Conclusion	73
2.3	Remarques importantes	73
3	Vocabulaire	74
3.1	Expérience aléatoire	74
3.1.1	Exemples	74
3.2	Ensemble fondamental	74
3.2.1	Exemples	75
3.3	Événement aléatoire	75
3.3.1	Exemples	75
3.3.2	En particulier	75
3.3.3	Remarques importantes	76
3.4	Notion de cardinalité	77
3.4.1	Définition	77
3.4.2	Exemples	77
3.4.3	Notation	77
3.5	Exercices	78

4	Définitions et propriétés de la probabilité	80
4.1	Première définition	80
4.2	Seconde définition	81
4.2.1	Axiomes de Kolmogorov	81
4.2.2	Propriétés	81
4.3	Exercices	82
5	Équiprobabilité	83
5.1	Définition	83
5.1.1	Exemple – Lancer une pièce de monnaie	83
5.1.2	Exemple – Lancer un dé à 6 faces	83
5.2	Formule de Laplace	84
5.3	Exercices à résoudre par dénombrement	85
5.4	Exercices à résoudre à l'aide d'un diagramme de Venn	87
5.5	Exercices à résoudre à l'aide d'un tableau à double entrée	89
6	Arbres et probabilité conditionnelle	91
6.1	Arbres simples	92
6.1.1	Exemple – Pièce de monnaie	92
6.2	Arbres pondérés	93
6.2.1	Règles d'utilisation d'un arbre pondéré	93
6.2.2	Exemple – Pièces défectueuses	94
6.2.3	Exemple – Pièce de monnaie et boules	95
6.2.4	Exemple – Dé truqué	96
6.3	Probabilités conditionnelles	97
6.3.1	Exemple – Bibliothèque	97
6.3.2	Exemple – Urne et boules	98
6.4	Exercices à résoudre à l'aide d'un arbre	99

UAA 2

Modèles de croissance

(Partie 6^e TQ)

1.1 Activité – La dune (1)

Une dune mesurait 200 mètres de large en 2010. Une équipe de scientifiques constate que chaque année la largeur de cette dune diminue de 2,5 mètres sous l'effet de l'érosion.

On note u_n la largeur de la dune en $(2010+n)$. Ainsi, u_0 représente la largeur de la dune en 2010 et vaut 200.

1. Que représente u_1 ? Calculer la valeur de u_1 .
2. Que représente u_2 ? Calculer la valeur de u_2 .
3. Que représente u_{15} ? Déterminer la valeur de u_{15} .

La dune joue un rôle important : elle protège les polders des risques d'inondation et intervient dans la gestion de la qualité des eaux.

Les scientifiques estiment qu'en dessous de 30 mètres de large, la dune ne peut plus assurer ce rôle en cas de phénomènes exceptionnels (tempêtes). Les autorités prévoient donc de ralentir l'érosion par des plantations d'oyats ⁽¹⁾ et la mise en place de barrières dès que la dune atteindra 60 mètres de large.

En quelle année, au plus tard, devra-t-on intervenir ?

1.2 Définition

Une suite arithmétique est une suite de nombres dont chacun vaut le précédent additionné à un nombre fixe appelé la raison (notée r).

1.3 Calcul de u_n

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = \overbrace{u_0 + r}^{u_1} + r = u_0 + 2r$$

$$u_3 = u_2 + r = \overbrace{u_0 + 2r}^{u_2} + r = u_0 + 3r$$

$$u_4 = u_3 + r = \overbrace{u_0 + 3r}^{u_3} + r = u_0 + 4r$$

...

$$u_n = u_0 + nr$$

(1). L'oyat (*Ammophila arenaria*), appelé aussi *chiendent marin*, est une espèce de plante vivace de la famille des Poacées, originaire de l'Ancien Monde, croissant dans les terrains sablonneux grâce à un système racinaire très profond. (Page Wikipedia consultée le 15.02.2021)

1.4 Généralisation

$$u_0 \qquad u_1 \qquad u_2 \qquad u_3 \qquad u_4 \qquad u_5$$

Si l'on souhaite calculer u_5 en connaissant u_2 , on voit que

$$u_5 = u_2 + 3r$$

$$u_5 = u_2 + (5 - 2)r$$

On peut donc généraliser :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

$$\text{avec } (n \geq p)$$

1.5 Activité – La dune (2)

En partant de l'activité proposée, calculer u_{12} en sachant que $u_4 = 190$.

1.6 Calcul d'une somme

Nous cherchons à calculer la somme suivante :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Nous pouvons écrire cette somme sous la forme suivante :

$$S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots \\ + (u_0 + (n-2)r) + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr)$$

Écrivons cette somme dans les deux sens possibles, à savoir, d'une part, du premier au dernier terme et, d'autre part, du dernier au premier terme :

$$S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots \\ + (u_0 + (n-2)r) + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr) \\ S = (u_0 + nr) + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + (n-2)r) + \dots \\ + (u_0 + 2r) + (u_0 + r) + u_0$$

Si l'on additionne ces deux équations, on obtient :

$$2S = (2u_0 + nr) + (2u_0 + nr) + (2u_0 + nr) + \dots \\ + (2u_0 + nr) + (2u_0 + nr) + (2u_0 + nr)$$

$$2S = (n+1) \cdot (2u_0 + nr) \\ S = \frac{(n+1) \cdot (2u_0 + nr)}{2} \\ S = \frac{(n+1) \cdot \left(u_0 + \overbrace{u_0 + nr}^{u_n} \right)}{2}$$

Mais comme $u_0 + nr = u_n$, alors

$$S = \frac{(n+1) \cdot (u_0 + u_n)}{2}$$

Si l'on doit calculer la somme, non pas depuis u_0 mais depuis un terme quelconque u_p , alors nous utiliserons la formule généralisée suivante :

$$S = \frac{(n-p+1) \cdot (u_p + u_n)}{2} \\ \text{avec } (n \geq p)$$

1.7 Exemples

Exemple 1

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 = ?$$
$$(S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = ?)$$

$$S = \frac{(6 + 1) \cdot (5 + 23)}{2} = 98$$

Exemple 2

Si $u_4 = 9$ et $u_{10} = -3$, alors que vaut la somme :

$$S = u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = ?$$

$$S = \frac{(10 - 4 + 1) \cdot (9 + (-3))}{2} = 21$$

Exemple 3

Et si l'on demandait de calculer la somme des 100 premiers nombres entiers, comment ferait-on ?

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$S = \frac{\overbrace{(99 + 1)}^{100} \cdot (1 + 100)}{2} = 5\,050$$

1.8 Exercices

Exercice 1

Sachant que $u_0 = 1\,000$ et $r = 600$, calculer u_5 et S telle que

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

Exercice 2

Sachant que $u_0 = 100$ et $u_{100} = 50$, calculer r .

Exercice 3

Sachant que $u_7 = 3\,000$ et $r = -50$, calculer u_1 .

Exercice 4

Sachant que $u_{10} = 9$ et $u_{18} = 21$, calculer u_{24} et S telle que

$$S = u_{10} + u_{11} + u_{12} + \cdots + u_{24}$$

Exercice 5

Calculer la somme des

1. 100 premiers nombres pairs.
2. 50 premiers multiples de 3.
3. 30 premiers multiples de 7.

Exercice 6

Les trois angles d'un triangle forment une suite arithmétique de raison 12° ; déterminer l'amplitude de ces angles (en utilisant la formule qui convient du chapitre actuel).

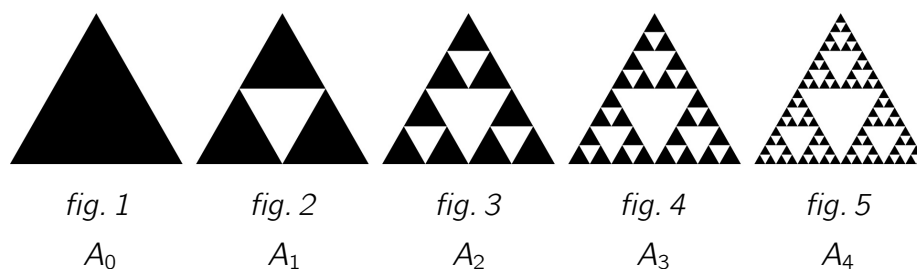
Exercice 7

Un jeu télévisé est organisé de la façon suivante : si le candidat donne une bonne réponse à la première question, il gagne 25€. Ensuite, chaque bonne réponse rapporte 15€ de plus que la précédente. Le jeu s'arrête à la première réponse fausse.

Quel est le nombre minimal de bonnes réponses que doit donner un candidat pour que le total de ses gains s'élève au moins à 1 000€ ?

2.1 Activité – Triangle de Sierpiński (1)

La figure ci-dessous montre les premières étapes de la construction du « triangle de Sierpiński ⁽¹⁾ » ⁽²⁾



Si l'on pose que l'aire du triangle noir de la figure 1 possède une aire de 4 cm^2 ($A_0 = 4$), calculer l'aire des triangles noirs des autres figures.

• Aire de la figure 2 : $A_1 =$

• Aire de la figure 3 : $A_2 =$

(1). Wacław Franciszek Sierpiński (1882-1969) est un mathématicien polonais.

(2). Le triangle de Sierpiński, dessiné en 1915, est un exemple de fractale. On le construit en commençant par dessiner un triangle équilatéral noir. On le divise ensuite en quatre triangles équilatéraux et congruents puis le triangle central est ôté. À l'étape suivante, on recommence le même processus avec chacun des triangles noirs. En poursuivant ce processus à l'infini, on obtient le triangle de Sierpiński.

• Aire de la figure 4 : $A_3 =$

• Aire de la figure 5 : $A_4 =$

Déterminer la formule permettant de calculer l'aire des triangles noirs pour n'importe quelle figure.

$$A_n =$$

2.2 Définition

Une suite géométrique est une suite de nombres dont chacun vaut le précédent multiplié par un nombre fixe appelé la raison (notée q).

2.3 Calcul de u_n

$$u_1 = u_0 \cdot q$$

$$u_2 = u_1 \cdot q = u_0 \cdot q \cdot q = u_0 \cdot q^2$$

$$u_3 = u_2 \cdot q = u_0 \cdot q^2 \cdot q = u_0 \cdot q^3$$

$$u_4 = u_3 \cdot q = u_0 \cdot q^3 \cdot q = u_0 \cdot q^4$$

...

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

2.4 Généralisation

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5$$

Si l'on souhaite calculer u_5 en connaissant u_2 , on voit que

$$u_5 = u_2 \cdot q^3$$

$$u_5 = u_2 \cdot q^{(5-2)}$$

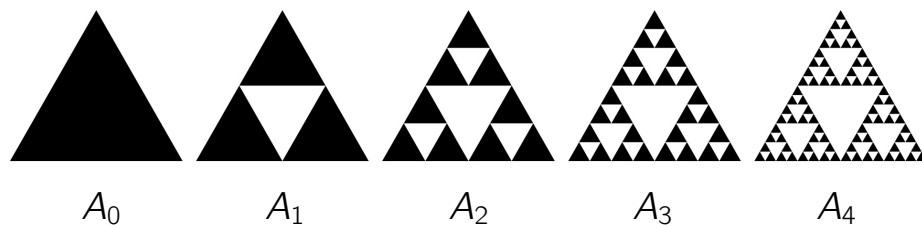
On peut donc généraliser :

$$u_n = u_p \cdot q^{(n-p)}$$

avec $(n \geq p)$

2.5 Activité – Triangle de Sierpiński (2)

En partant de l'activité proposée au début du chapitre (p.14), calculer A_8 sachant que A_3 qui vaut $\frac{135}{64}$.



2.6 Calcul d'une somme

Nous cherchons à calculer la somme suivante :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Nous pouvons écrire cette somme sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S = & u_0 + (u_0 \cdot q) + (u_0 \cdot q^2) + \cdots \\ & + (u_0 \cdot q^{(n-2)}) + (u_0 \cdot q^{(n-1)}) + (u_0 \cdot q^n) \end{aligned}$$

Mettons u_0 en évidence :

$$S = u_0 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} + q^n)$$

Laissons cette équation de côté pour le moment et attardons-nous sur

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} + q^n \quad (1)$$

Si l'on multiplie cette somme par q , on obtient :

$$\begin{aligned} q \cdot S &= q \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} + q^n) \\ q \cdot S &= q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{(n-1)} + q^n + q^{(n+1)} \end{aligned} \quad (2)$$

En soustrayant membre à membre les égalités (1) et (2), donc (1)–(2), on obtient :

$$\begin{aligned} S - q \cdot S &= (1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-1)} + q^n) \\ &\quad - (q + q^2 + \cdots + q^{(n-1)} + q^n + q^{(n+1)}) \\ S \cdot (1 - q) &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-1)} + q^n \\ &\quad - q - q^2 - \cdots - q^{(n-1)} - q^n - q^{(n+1)} \end{aligned}$$

Il reste donc

$$S \cdot (1 - q) = 1 - q^{(n+1)}$$

Et donc

$$S = \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$$

La somme recherchée devient donc :

$$S = u_0 \cdot \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$$

Si l'on doit calculer la somme, non pas depuis u_0 mais depuis un terme quelconque u_p , alors nous utiliserons la formule généralisée suivante :

$$S = u_p \cdot \frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q}$$

avec $(n \geq p)$

2.7 Exemples

Exemple 1

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = ?$$
$$(S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = ?)$$

$$S = 3 \cdot \frac{1 - 2^{(5+1)}}{1 - 2}$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - 2^{(6)}}{1 - 2}$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - 64}{-1}$$

$$= 3 \cdot \frac{-63}{-1}$$

$$= 3 \cdot 63$$

$$= 189$$

Exemple 2

Si $u_4 = 9$ et $q = \frac{2}{3}$, alors que vaut la somme :

$$S = u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = ?$$

$$S = 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(8-4+1)}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$= 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(5)}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$= 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{32}{243}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$= 9 \cdot \frac{\left(\frac{243}{243}\right) - \left(\frac{32}{243}\right)}{\left(\frac{3}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$= 9 \cdot \frac{\left(\frac{211}{243}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{211}{243}\right) \cdot \left(\frac{3}{1}\right)$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{211}{81}\right)$$

$$= \left(\frac{211}{9}\right)$$

2.8 Exercices

Exercice 1

Sachant que $u_8 = \frac{125}{32}$ et $q = \frac{-1}{2}$,

1. Calculer le terme u_0
2. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 2

Sachant que $u_5 = \frac{-81}{32}$ et $q = \frac{3}{2}$,

1. Calculer le terme u_1
2. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 3

Sachant que $u_7 = 0,512$ et $u_{10} = 4,096$,

1. Calculer la raison q
2. Calculer le terme u_0
3. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 4

Sachant que $u_0 = 16$ et $u_4 = 81$, calculer la raison q .

Exercice 5

Sachant que $u_0 = 1$ et $q = 0,5$,

1. Calculer le terme u_5
2. Calculer la somme des six premiers termes de cette série.

Exercice 6

Sachant que $u_5 = 729$ et $q = -3$,

1. Calculer le terme u_{10}
2. Calculer le terme u_0

Exercice 7

Je place un capital de 20 000 € à 5% l'an.

1. De combien disposerais-je après 4 ans ?
2. Et après 10 ans ?

Exercice 8

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 3 + 60 + 1\,200 + 24\,000 + 480\,000$$

Exercice 9

Calculer la somme des six premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 50 et de raison 5.

Exercice 10

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2\,187 + 6\,561$$

2.9 Exercices S.A. / S.G.

Exercice 1

Lorsque l'on est face à des séries de valeurs, comment peut-on distinguer celles qui sont des suites arithmétiques de celles qui sont des suites géométriques ?

Exercice 2

Pour chaque série de valeurs ci-dessous, dire s'il s'agit d'une série arithmétique ou d'une série géométrique en cochant la case correcte, puis justifier son choix.

2.1

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.2

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.3

7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.4

2020 ; 1010 ; 0 ; -2020 ; -1010

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.5

9 ; 7 ; 5 ; 3 ; 1

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.6

0,000 1 ; 0,001 ; 0,01 ; 0,1 ; 1

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.7

81 ; 88 ; 96 ; 105 ; 115

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.8

3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.9

1,4 ; 1,68 ; 2,016 ; 2,4192 ; 2,90304

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.10

2020 ; 1010 ; 0 ; -1010 ; -2020

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.11

77 ; 88 ; 99 ; 111 ; 123

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.12

$-1250 ; 250 ; -50 ; 10 ; -2$

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.13

$4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36$

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

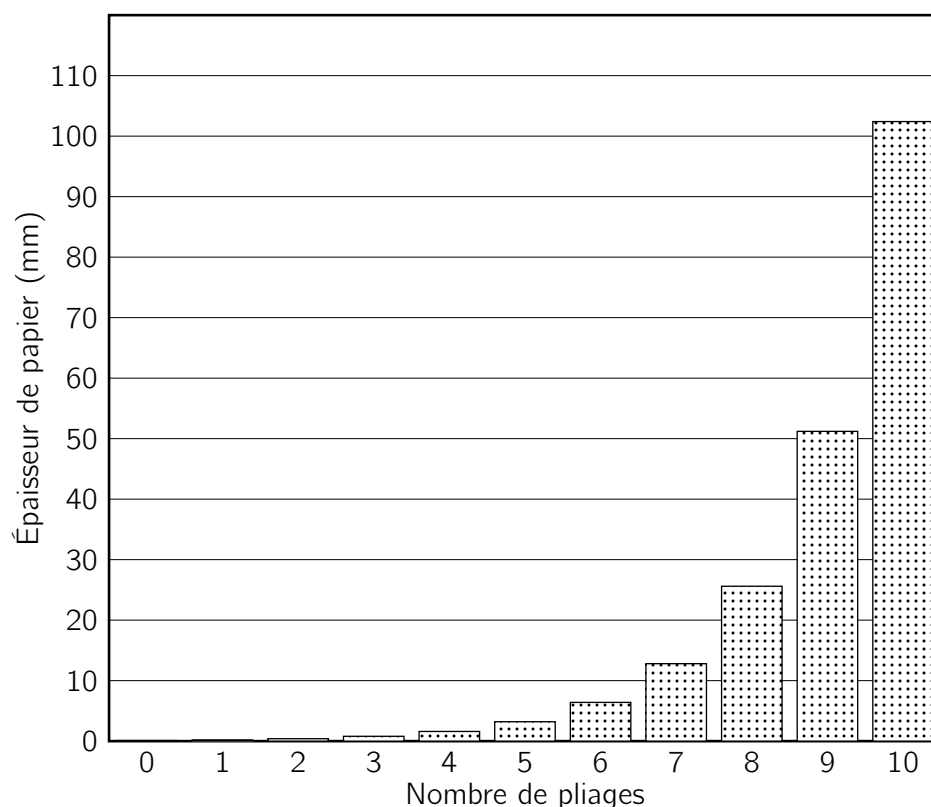
Les fonctions puissance et exponentielle

3.1 Activité – La feuille de papier

Partons du principe que l'on puisse plier indéfiniment une feuille de papier.

Si l'on plie une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur en deux, en quatre, en huit, en seize,... et ceci cinquante fois, serait-il possible d'obtenir une épaisseur qui dépasserait la distance de la Terre à la Lune ($\sim 385\,000$ km) ?

Commençons par calculer l'épaisseur pour quelques pliages et portons-les en graphique pour obtenir une meilleure vision du « phénomène » :



Nous constatons qu'après seulement 10 pliages, l'épaisseur est déjà de 102,4 mm.

La formule permettant de calculer rapidement l'épaisseur (e) est :

$$e = 0,1 \cdot 2^n$$

où n est le nombre de pliages

Et nous nous rendons compte que, malgré la fine épaisseur de la feuille de papier, l'épaisseur augmente de manière exponentielle avec le nombre de pliages pour atteindre rapidement des valeurs considérables ⁽¹⁾.

Pour en revenir au questionnement du début de l'activité, faisons le calcul de l'épaisseur pour 50 pliages :

$$\begin{aligned} e &= 0,1 \cdot 2^{50} \\ &= 112\,589\,990\,684\,262,4 \text{ mm} \\ &= 112\,589\,990,7 \text{ km} \end{aligned}$$

À cette distance, il y a longtemps que la Lune est dépassée. De plus, avec un seul pliage supplémentaire, on dépasse la distance Terre-Soleil ⁽²⁾.

3.2 Fonction exponentielle

La fonction observée ici est une fonction dite exponentielle, du type

$$f(x) = a^x$$

avec : $a > 0$ et $a \neq 1$

Il est important de bien faire la différence entre les fonctions exponentielles et les fonctions puissances. Dans une fonction puissance, l'exposant est fixé

(1). Je vous invite à lire l'article paru en 2012 dans le *Nouvel Observateur* : <https://www.nouvelobs.com/les-internets-vous-parlent/20120113.OBS8766/un-nouveau-record-du-monde-de-plier-de-papier.html>. Si vous avez l'occasion de lire l'article paru sur le site *New Scientist*, c'est encore mieux (<https://www.newscientist.com/article/mg21228441-700-scrunch-time-the-peculiar-physics-of-crumpled-paper/>). Dernière consultation des pages le 4 juin 2022.

(2). Épaisseur atteinte de 225 179 981,4 km, soit environ 1,5 fois la distance Terre-Soleil.

et la base varie, tandis que dans une fonction exponentielle, la base est fixée et c'est l'exposant qui varie.

3.2.1 Exemple de fonction puissance

$$f(x) = x^3 \quad ; \quad f(x) = \frac{2}{3}x^4 \quad ; \quad f(x) = 2\pi x^2 \quad ; \quad \dots$$

3.2.2 Exemple de fonction exponentielle

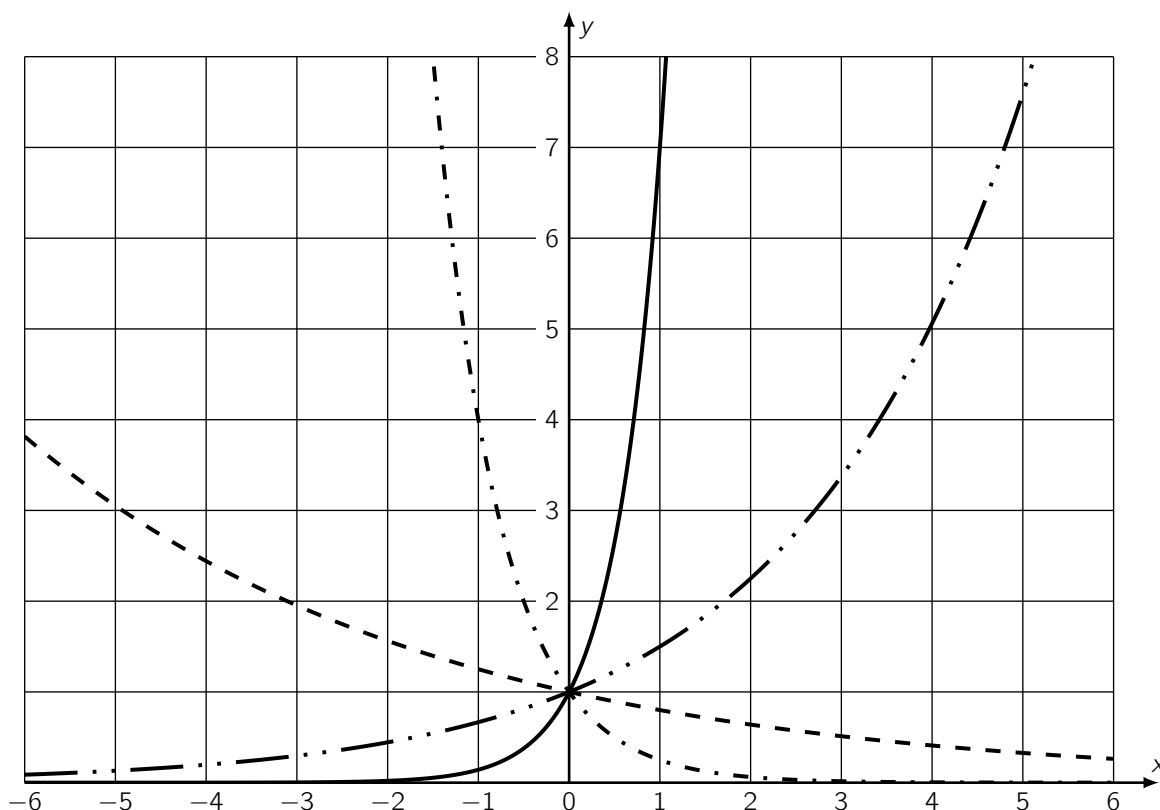
$$f(x) = 2^x \quad ; \quad f(x) = 100 \cdot 1,03^x \quad ; \quad \dots$$

3.3 Représentation graphique

Voici le graphe des quatre fonctions exponentielles suivantes :

$$f(x) = 0,25^x \quad ; \quad f(x) = 1,5^x \quad ; \quad f(x) = 7^x \quad ; \quad f(x) = 0,8^x$$

Saurez-vous les identifier ?

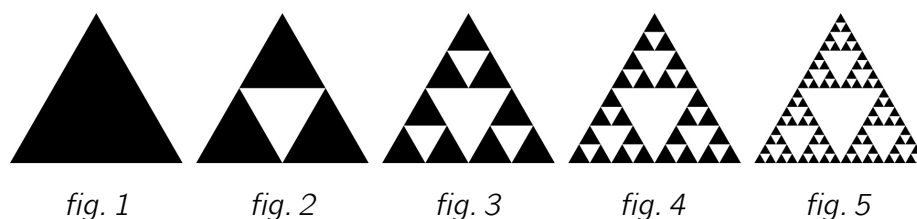


3.4 Constatations / recherche

- * Toutes ces courbes se coupent en un seul point : $(0; 1)$
En effet, dans la fonction $f(x) = a^x$, quelle que soit la valeur de la base, si x vaut zéro, la fonction vaudra toujours 1.
- * Deux fonctions sont croissantes : _____ et _____
Deux fonctions sont décroissantes : _____ et _____
→ Comment sont les bases ?
- * $a^x > 0$ ce qui fait que toutes les fonctions exponentielles se trouvent au-dessus de l'axe x , axe qui est aussi une asymptote horizontale (en $-\infty$ et en $+\infty$, en fonction de la valeur de la base).

3.5 Activité – Triangle de Sierpiński (3)

Repartons de l'activité de la page 14. La figure ci-dessous montre les premières étapes de la construction du « triangle de Sierpiński »



1. Écrire les sept premiers termes (de u_0 à u_6 , n allant donc de 0 à 6) de la suite formée par le nombre de triangles noirs de chacune des figures.
2. Déterminer le terme u_9 de cette série.

3. Écrire la formule donnant le nombre de triangles noirs d'une figure en fonction de sa position n .

4. Essayons d'écrire une équation qui va permettre de déterminer la position n pour laquelle il y a 531 441 triangles noirs dans la figure.

5. Est-il possible de résoudre cette équation ? Pourquoi ?

Pour pouvoir résoudre une équation du type $a^x = b$, il est nécessaire de connaître une nouvelle notion : les logarithmes.

Les logarithmes décimaux

4.1 Introduction

Nous allons introduire la notion de logarithme par quelques applications de la vie courante.

4.1.1 L'acidité d'une solution aqueuse

En 1909, le chimiste danois Sørensen introduit la notion de « potentiel hydrogène » en définissant l'acidité d'une solution comme étant le cologarithme décimal de la concentration en ions hydrogène.

Cette définition est plus connue sous la formule (sans unité) :

$$pH = -\log [H^+]$$

Cette notion est bien plus complexe mais il n'entre pas dans le cadre de ce cours de l'étudier plus en profondeur ⁽¹⁾.

4.1.2 La magnitude d'un tremblement de terre

Celle-ci mesure l'énergie libérée lors d'un séisme. C'est en 1935 que Charles Richter ⁽²⁾ met au point une échelle sur laquelle il indique les magnitudes des séismes.

De nos jours, on ne peut plus se baser sur l'échelle de Richter car elle est dépassée. En effet, elle est très locale et adaptée uniquement aux

(1). La notion d'acidité est vue plus en détail dans le cours de *Formation scientifique*, UAA 14.

(2). Charles Francis Richter (1900-1985), sismologue américain.

tremblements de terre californiens. C'est donc improprement que les médias utilisent le terme d'échelle de Richter. Ils devraient plutôt employer celle de Beno Gutenberg⁽³⁾ établie en 1945.

Voici la définition originale donnée par Richter (en 1935) et que l'on appelle de nos jours « magnitude locale » (M_L , sans unité) :

$$M_L = \ln(A) - \ln(A_0) + c \cdot \ln(\Delta)$$

- * A représente l'amplitude maximale mesurée sur le sismogramme ;
- * A_0 est une amplitude de référence correspondant à un séisme de magnitude 0 (zéro) à 100 km ;
- * Δ est la distance épicentrale, en kilomètres ;
- * c est une constante d'étalonnage.

Comme il s'agit d'une échelle logarithmique⁽⁴⁾, on a donc affaire à une échelle ouverte.

Le séisme le plus violent à été enregistré au Chili le 22 mai 1960 avec une amplitude de... 9,5 !

4.1.3 Le niveau sonore

Il est courant d'entendre parler de décibels pour un son, mais de quoi s'agit-il ?

En réalité, le son résulte d'une pression exercée sur nos tympans. Cette pression, comme toute pression, se mesure en pascals (Pa).

L'oreille est un organe extrêmement sensible. Il perçoit des pressions acoustiques variant de $2 \cdot 10^{-5}$ Pa à 20 Pa. L'échelle varie donc de 1 à 1.000.000 !

Pour simplifier la mesure du niveau de pression acoustique, encore appelé *niveau sonore*, les acousticiens ont adopté une échelle logarithmique.

(3). Beno Gutenberg (1889-1960) est géologue et sismologue allemand.

(4). Il s'agit bien de logarithme. La notation « $\ln$ » fait référence au *logarithme naturel*, appelé également *logarithme népérien* en hommage au mathématicien John Napier qui établit les premières tables logarithmiques. John Napier (1550-1617) est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais.

L'unité du niveau sonore est le décibel.

$$L_P = 10 \cdot \frac{\log(P^2)}{\log(P_0^2)}$$

* P est la pression acoustique mesurée ;

* P_0 est la pression acoustique de référence ($2 \cdot 10^{-5} Pa$).

4.2 Comment faisait-on avant les calculatrices scientifiques ?

On utilisait des livres regroupant, entre autres, des tables de logarithmes. Ces tables avaient été calculées auparavant par des hommes, à la main, pendant des heures, pour ne finalement comporter « que » cinq décimales.

En voici un extrait :

LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 100

N	log.	N	log.	N	log.	N	log.	N	log.
1	00 000	21	32 222	41	61 278	61	78 533	81	90 849
2	30 103	22	34 242	42	62 325	62	79 239	82	91 381
3	47 712	23	36 173	43	63 347	63	79 934	83	91 908
4	60 206	24	38 021	44	64 345	64	80 618	84	92 428
5	69 397	25	39 794	45	65 321	65	81 291	85	92 942
6	77 845	26	41 497	46	66 276	66	81 954	86	93 450
7	84 510	27	43 136	47	67 210	67	82 607	87	93 952
8	90 309	28	44 716	48	68 124	68	83 251	88	94 448
9	95 424	29	46 240	49	69 020	69	83 885	89	94 939
10	00 000	30	47 712	50	69 897	70	84 510	90	95 424
11	04 139	31	49 136	51	70 757	71	85 126	91	95 904
12	07 918	32	50 515	52	71 600	72	85 733	92	96 379
13	11 394	33	51 851	53	72 428	73	86 332	93	96 848
14	14 613	34	53 148	54	73 239	74	86 923	94	97 313
15	17 609	35	54 407	55	74 036	75	87 506	95	97 772
16	20 412	36	55 630	56	74 819	76	88 081	96	98 227
17	23 045	37	56 820	57	75 587	77	88 649	97	98 677
18	25 527	38	57 978	58	76 343	78	89 209	98	99 123
19	27 875	39	59 106	59	77 085	79	89 763	99	99 564
20	30 103	40	60 206	60	77 815	80	90 309	100	00 000

4.3 Logarithmes décimaux

Précisons, avant d'aller plus loin, qu'il existe un grand nombre de types de logarithme. Seulement deux sont couramment utilisés : le logarithme népérien (qui ne sera pas étudié dans ce cours) et le logarithme décimal.

4.3.1 Activités - Puissances et logarithmes

Activité 1.1

Écrire chaque nombre sous la forme d'une puissance de 10.

- $100 =$
- $1000 =$
- $0,001 =$
- $10 =$
- $0,01 =$
- $1 =$

Le logarithme décimal d'un nombre x est noté « $\log x$ » ; il équivaut à l'exposant de la puissance de 10 égale à ce nombre.

Exemple :

$$\log 10\,000\,000 = \log 10^7 = 7$$

Activité 1.2

Calculer le logarithme des nombres suivants en se basant sur l'exemple.

- $\log 100 =$
- $\log 1000 =$
- $\log 0,001 =$
- $\log 10 =$
- $\log 0,01 =$
- $\log 1 =$

À l'aide de la calculatrice, vérifier les réponses ci-dessus.

Activité 1.3

Calculer le logarithme des nombres suivants puis les vérifier à l'aide de la calculatrice.

- $\log 100\,000\,000 =$

- $\log 10^{-15} =$

- $\log 0,000\,01 =$

- $\log 10^{12} =$

Remarque : il n'est pas obligatoire que les puissances de 10 soient des valeurs entières.

Activité 2.1

À l'aide de la calculatrice, calculer le logarithme des nombres suivants à 0,001 près.

- $\log 7 =$

- $\log 0,000\,002 =$

- $\log 2,18 =$

- $\log \sqrt{3} =$

- $\log -7,9 =$

- $\log 0 =$

- $\log \pi =$

- $\log -1 =$

- $\log 1 =$

- $\log \frac{4}{9} =$

Activité 2.2

Quelle conclusion peut-on tirer de l'activité 2.1 ?

Activité 3.1

À l'aide de la calculatrice, calculer les expressions suivantes.

• $\log 10^3 =$

• $-1 \cdot \log 2 =$

• $4 \cdot \log 5 =$

• $3 \cdot \log 10 =$

• $\log 2^{-1} =$

• $10 \cdot \log 2 =$

• $\log 5^4 =$

• $\log 49^2 =$

• $4 \cdot \log 7 =$

• $\log 1024 =$

Activité 3.2

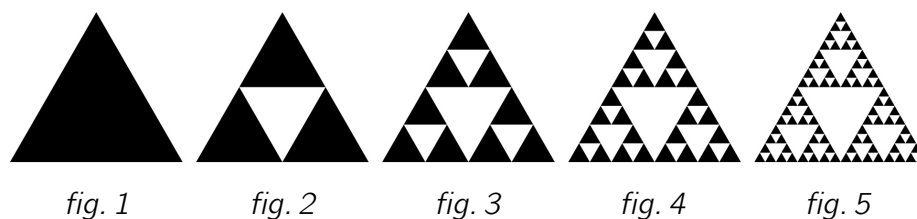
Dans l'activité 3.1 ci-dessus, regrouper deux par deux les expressions équivalentes (entourer, surligner,...)

Activité 3.3

Quelle conclusion peut-on tirer des activités 3.1 et 3.2 ?

4.3.2 Enfin, la réponse !

Rappelons-nous de l'activité de la page 14.



Nous avons déterminé les premiers termes de la suite (le nombre de triangles noirs de chaque figure) :

1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243 ; 729 ; ...

Nous avons également déterminé la formule permettant de calculer le nombre de triangles noirs d'une figure en fonction de sa position n :

$$u_n = 1 \cdot 3^n$$

Par contre, nous n'avons pas réussi à résoudre l'équation permettant de déterminer la position n (que l'on appelle aussi le *rang*) pour laquelle il y a 531 441 triangles noirs dans la figure. Maintenant, vous êtes à même de résoudre cette équation.

Pour résoudre cette équation, procédons par étape.

Étape 1 : écrire l'équation initiale.

$$531\,441 = 1 \cdot 3^n$$

Étape 2 : isoler le facteur 3^n .

$$531\,441 = 3^n$$

Étape 3 : appliquer le logarithme aux deux membre de l'équation.

$$\log 531\,441 = \log 3^n$$

Étape 4 : appliquer la propriété du logarithme d'une puissance.

$$\log 531\,441 = n \cdot \log 3$$

Étape 5 : isoler la variable et calculer sa valeur à l'aide de la calculatrice.

$$\frac{\log 531\,441}{\log 3} = n$$
$$n = 12$$

Étape 6 : écrire la réponse du problème à l'aide d'une phrase.

4.3.3 Un peu de pratique

À l'aide du raisonnement ci-dessus, résoudre les équations suivantes :

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

avec $u_n = 76\,972\,032$,

$$u_1 = 2\,349 \text{ et } q = 2$$

$$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

avec $u_n = 97\,200$,

$$u_5 = 1\,200 \text{ et } q = 3$$

4.4 Constatations

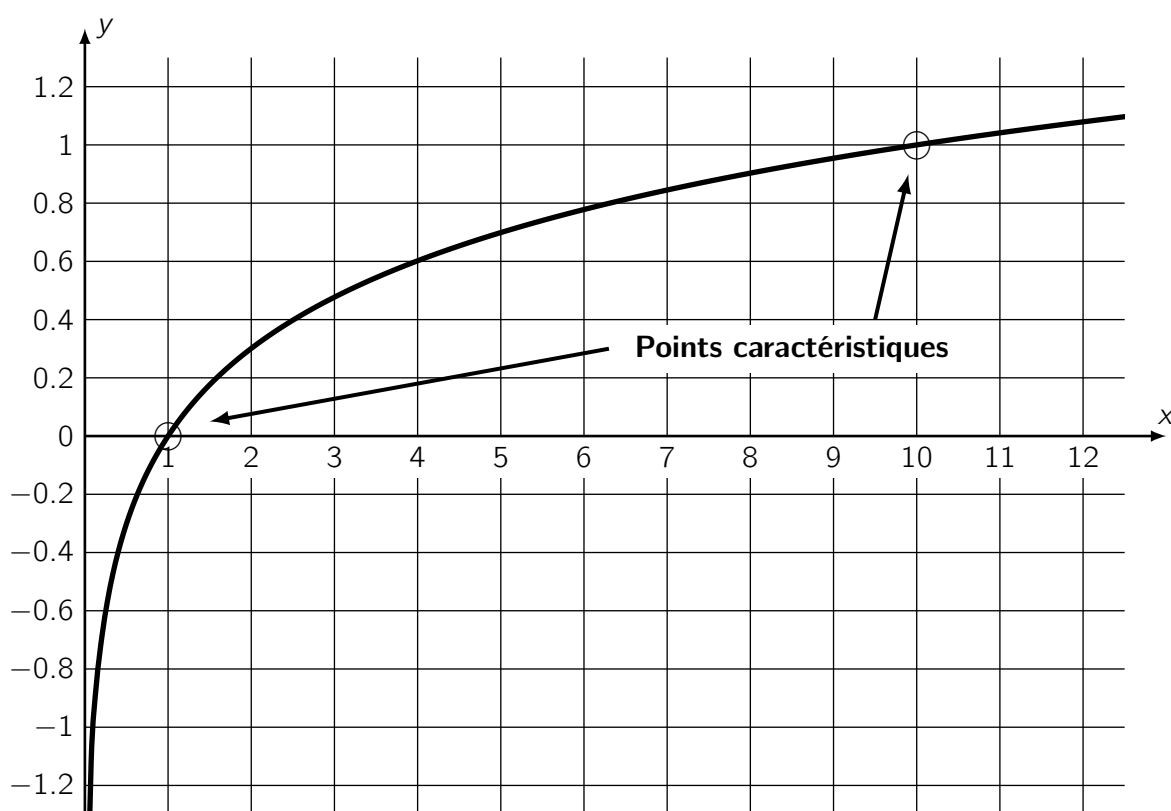
Au vu de ce qui vient d'être fait, nous constatons que :

1. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithme ;
2. Le logarithme de 1 est égal à zéro ;
3. Les logarithmes des nombres plus grands que 1 sont positifs ;
4. Les logarithmes des nombres supérieurs à 0 et inférieurs à 1 sont négatifs.

4.5 Définition

On appelle logarithme décimal d'un nombre x , noté « $\log x$ », l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 10 pour obtenir x (avec $x > 0$).

4.6 Représentation graphique



Remarquons que ce graphe n'est pas orthonormé.

4.7 Propriétés des logarithmes

4.7.1 Logarithme d'un produit

$$\log AB = \log A + \log B$$

4.7.2 Logarithme d'un quotient

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

4.7.3 Logarithme d'une puissance

$$\log A^p = p \cdot \log A$$

4.7.4 Logarithme d'une racine

On oublie souvent que la racine d'un nombre peut être écrite sous la forme d'une puissance fractionnaire de ce nombre :

$$\sqrt[n]{A^p} = A^{\frac{p}{n}}$$

$$\log \sqrt[n]{A^p} = \log A^{\frac{p}{n}} = \frac{p}{n} \cdot \log A$$

4.8 Exercices

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes en donnant, si nécessaire, la solution à 0,001 près.

- $4^x = 16$

- $2,952\,45 = 5 \cdot 0,9^x$

- $724,077\,343\,9 = 4 \cdot 32^x$

- $48 = 3 \cdot 2^{x-3}$

- $2 \cdot 4^x = 256$

- $7 \cdot 3^{5-x} = \frac{7}{9}$

- $2\,655,992\,279 = 2,2^x$

- $4\,096 = 2^{3x}$

- $2 \cdot 0,4^x = 12,5$

- $3^{10+x} + 13 = 2\,200$

Exercice 2

Dans une évaluation, se trouve l'énoncé suivant :

« Calculer la somme des dix premiers termes d'une suite géométrique dont $u_0 = -5$ et $u_2 = -45$. »

À la fin de l'évaluation, tu compares ta réponse à celle de ton voisin. Tu as obtenu 73 810 et ton voisin a trouvé -147 620. Qui a raison ? Justifier.

Exercice 3

Les parents de Benoit possèdent une citerne d'eau de pluie. Chaque jour de l'été, $1/16^e$ de l'eau s'évapore. Le premier jour de leur départ en vacances, la hauteur de l'eau contenue dans la citerne était de 1,20 mètre et le jour de leur retour, cette hauteur n'est plus que de 40 cm. Sachant qu'il n'a pas plu depuis leur départ, déterminer la durée de leurs vacances.

Exercice 4

Une balle est lâchée d'une hauteur de 2 mètres. À chaque fois qu'elle touche le sol, elle rebondit jusqu'à 75 % de sa hauteur précédente.

1. Quelle hauteur atteint la balle après le troisième rebond ?
2. Quelle hauteur atteint la balle après le $n^{\text{ième}}$ rebond ?
3. Combien de fois la balle doit-elle rebondir avant que la hauteur soit inférieure à 15 cm ?

Exercice 5

Émilie décide de courir chaque jour au cours de ses deux semaines (14 jours) de vacances. Le premier jour elle court 1 km. Chaque jour qui suit, elle court 25 % de plus que la distance courue la veille.

1. Quelle distance totale aura-t-elle parcourue à la fin de ses vacances ?
2. Quel jour parcourra-t-elle plus de 10 km ?

Exercice 6



Dans le pédiluve de la piscine, on relève toutes les heures la concentration de désinfectant. À 11 heures, il y a 30,706 ppm de produit et à 14 heures, il y en a 18,857 ppm. On suppose que cette déperdition peut être modélisée par une suite géométrique.

1. Quelle est la concentration du produit qui a été mise dans l'eau du pédiluve à l'ouverture de la piscine à 8 heures ?
2. Si la concentration minimale acceptée est de 13 ppm, à quelle heure (heure entière) doit-on remettre du désinfectant dans le pédiluve ?

Exercice 7

Calculer les logarithmes suivants en se basant sur les propriétés vues ci-dessus. Au terme du développement complet, il ne doit plus rester que des logarithmes de nombres premiers^a (ou éventuellement de 10), ensuite, l'utilisation de la calculatrice ou du tableau de la page 37 est nécessaire pour calculer la réponse finale.

• $\log 14 =$

• $\log 27^2 =$

• $\log 10^{19} =$

• $\log 60 =$

• $\log 210 =$

• $\log 121 =$

• $\log 36 =$

• $\log 245 =$

• $\log 512 =$

• $4 \cdot \log 100^3 =$

a. Un nombre premier est un nombre qui ne possède que deux diviseurs (distincts) : 1 et lui-même. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 30 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

Exercice de renforcement **

Calculer les logarithmes suivants en se basant sur les propriétés vues ci-dessus. Après développement complet, l'utilisation de la calculatrice ou du tableau de la page 37 est nécessaire pour calculer la réponse finale.

Au terme du développement complet, il ne doit plus rester que des logarithmes de nombres premiers (ou éventuellement de 10).

1) $\log 10^{239} =$

12) $17 \cdot \log 900^4 =$

2) $\log 300 =$

13) $\log \sqrt[6]{64^4} =$

3) $\log 2700 =$

14) $\log \left(\frac{2^{\frac{5}{2}}}{128^{\frac{2}{5}}} \right) =$

4) $\log 32 =$

15) $\log \left(\frac{\sqrt[8]{49^4}}{10} \right)^{\frac{4}{3}} =$

5) $\log 33 =$

6) $\log 81 =$

16) $\log \frac{\sqrt[3]{125^2}}{\sqrt[4]{625^2}} =$

7) $\log 30^2 =$

8) $\log 10^{\frac{5}{3}} =$

17) $\log \frac{121}{12} =$

9) $\log 144 =$

18) $3 \cdot \log \frac{25^2}{25^3} =$

10) $\log 1024 =$

11) $\log 2500^9 =$

19) $\log \sqrt[6]{\frac{3^9}{4^9}} =$

Introduction aux mathématiques financières

5.1 Intérêts simples et composés

Lorsque l'on donne le choix de recevoir une certaine somme maintenant ou plus tard, il est naturel de choisir de la recevoir immédiatement et ainsi donc de pouvoir l'utiliser éventuellement tout de suite. Dans le cas où l'on ne recevra cet argent que plus tard, on exige alors d'en recevoir plus, afin de « combler » cette privation. Cette rémunération supplémentaire est appelée intérêt. Ce qui va permettre de déterminer précisément cet intérêt, c'est le taux d'intérêt. Les taux d'intérêt sont déterminés en fonction de l'offre et de la demande de liquidités provenant des entreprises, du secteur public mais également des particuliers comme vous et moi. Il va de soi qu'il existe bien des taux d'intérêt et non pas un seul. Ceux-ci sont fonction de différents facteurs dont, bien sûr, l'échéance.

5.2 Définitions

Le capital : La somme prêtée ou empruntée s'appelle le capital.

L'intérêt : La compensation exigée s'appelle l'intérêt.

L'intérêt est calculé selon un pourcentage du capital.

Le taux d'intérêt : Ce pourcentage s'appelle le taux d'intérêt.

La valeur acquise : La somme du capital et des intérêts accumulés après un certain temps constitue la valeur acquise (ou valeur finale) d'un placement ou d'un emprunt.

5.3 Différence entre intérêts simple et composé

5.3.1 Intérêts simples

Lorsque des emprunts (ou des placements) sont de courtes durées (à court terme), généralement d'une durée inférieure à deux ans, on utilise l'intérêt simple. Celui-ci sera proportionnel à la durée de l'emprunt et sera versé en une seule fois, soit au début, soit au terme de l'opération.

5.3.2 Intérêts composés

À l'inverse, lorsque des emprunts (ou des placements) sont de longue durée (à long terme), c'est-à-dire d'une durée supérieure à deux ans, on utilise l'intérêt composé. Le créancier considérera l'intérêt produit au bout d'une année comme étant un nouveau capital. Il l'ajoutera donc périodiquement au capital pour qu'il rapporte lui-même de l'intérêt. On dit que les intérêts se capitalisent à la fin de chaque période. L'intérêt ne sera donc plus proportionnel à la durée de l'emprunt.

5.4 Intérêts simples

5.4.1 Activité – Alexandra vs Audrey

Alexandra prête 1 200 € à Audrey à 3 % l'an. Le prêt doit être remboursé dans 4 ans et l'intérêt doit être versé chaque année à l'anniversaire du prêt. Déterminer l'intérêt annuel, l'intérêt total et la valeur acquise dans 4 ans.

	Calcul	Formule utilisée
Intérêt annuel :		
Intérêt total :		
Valeur acquise :		

5.4.2 Formules fondamentales

Calcul des intérêts

$$I = C \cdot t \cdot n$$

Calcul de la valeur acquise

$$A = C \cdot (1 + t \cdot n)$$

où :

- A : la valeur future ou acquise
- C : le capital prêté ou emprunté
- t : le taux d'intérêt annuel
- n : le nombre d'années du prêt ou de l'emprunt

5.5 Exercices

Exercice 1

Tarik emprunte 5 000 € à 4,5 % l'an, remboursable dans 3 ans. Il doit payer chaque année l'intérêt couru.

Calculer l'intérêt annuel, l'intérêt total et la valeur acquise (dans 3 ans).

Exercice 2

Kevin emprunte 8 500 € pour 2 ans au taux de 8,75 %. Les intérêts sont payables annuellement.

- * Quel sera l'intérêt annuel ?
- * Combien lui coûtera son emprunt ?
- * Déterminer la valeur finale du prêt.

Exercice 3

Ali emprunte 800 € et rembourse 840 € après 6 mois.

De quel taux d'intérêt annuel a-t-il bénéficié ?

Exercice 4

Annie emprunte 1 750 € et rembourse 1 800 € trois mois plus tard.

De quel taux d'intérêt annuel a-t-elle bénéficié ?

Exercice 5

Fabian emprunte 1 300 € au taux de 13 % l'an pour une période de 8 mois. Combien doit-il rembourser à l'échéance ?

Exercice 6

Nathalie a prêté une somme C pour un an et six mois au taux annuel de 12,25 %.

Les intérêts sont payables à la fin de la première année et à l'échéance. Déterminer C , sachant que Nathalie a reçu en tout (capital et intérêts) la somme de 1 538,88 €.

Exercice 7

Sandrine a prêté 750 € au taux annuel de 5 %. À l'échéance, la valeur finale de son prêt est de 762,50 €. Calculer la durée du prêt.

Exercice 8

Fatima emprunte 3 000 € pour trois mois à un taux de 2,55 %. Combien devra-t-elle verser à l'échéance ?

Exercice 9

Quelle somme Redouan a-t-il emprunté il y a six mois à un taux de 3 % l'an s'il doit maintenant remettre 2 842 € ?

Exercice 10

Julie prête 1 200 € à 3,15 % l'an. Le remboursement doit se faire dans 3 ans. Elle doit payer l'intérêt couru chaque année à l'anniversaire du prêt. Calculer l'intérêt annuel, l'intérêt total et la valeur acquise (dans 3 ans).

Exercice 11

Pour combien de temps Olivier a-t-il emprunté 750 € à un taux de 9 % s'il a dû rembourser 795 € ?

Exercice 12

À quel taux d'intérêt simple Magdalena a-t-elle emprunté 5 000 € pendant 5 ans si elle a dû rembourser en tout 7 250 € ?

Exercice 13

Je décide d'acheter 8 000 € de bons de caisse à 4 ans qui rapportent 2,80 % d'intérêt simple par an. Je dois payer 25 % de précompte mobilier sur les intérêts perçus.

5.6 Intérêts composés

5.6.1 Activité – Bons de croissance

J'achète 1 200 € en bons de croissance pour une durée de 4 ans à un taux annuel de 3%. J'opte pour la capitalisation, les intérêts seront donc capitalisés et versés une seule fois à l'échéance.

Calculer la valeur acquise au bout de :

1 an :

2 ans :

3 ans :

4 ans :

Quel est l'avantage d'un placement par capitalisation ?

Il est possible de calculer directement la valeur acquise au bout des 4 ans.
En effet,

$$A_1 = 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) \\ &= 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) \\ &= 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) \\ &= 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) \\ &= 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= A_3 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) \\ &= 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) \\ &= 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 \end{aligned}$$

Et donc, connaissant le capital initial, le taux d'intérêt et la durée du placement, on a :

$$A_4 = 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4$$

5.6.2 Formules fondamentales

Calcul de la valeur acquise

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

Calcul des intérêts

$$I = A - C$$

où : A : la valeur future ou acquise
 C : le capital prêté ou emprunté
 t : le taux d'intérêt annuel
 n : le nombre d'années du prêt ou de l'emprunt

5.7 Exercices

Exercice 1

Un capital de 5 000 € est placé, à intérêts composés, pendant 10 ans, au taux annuel de 4,5 %. Calculer la valeur acquise et le montant total des intérêts.

Exercice 2

Un capital de 7 200 € est placé, à intérêts composés, pendant 8 ans, au taux annuel de 6 %. Calculer la valeur acquise et le montant total des intérêts.

Exercice 3

J'ai emprunté 325 000 € à ma banque pour construire une maison. La durée de mon emprunt est de 20 ans. Combien devrais-je rembourser si je bénéficie d'un taux annuel de 4,3 % ?

Exercice 4

Un capital est placé, à intérêts composés, pendant 5 ans, au taux annuel de 5 %. La valeur acquise est de 8 933,97 €. Calcule le capital placé et le montant des intérêts perçus.

Exercice 5

Un capital est placé, à intérêts composés, pendant 7 ans, au taux annuel de 6 %. La valeur acquise est de 19 126,18 €. Calcule le capital placé et le montant des intérêts perçus.

Exercice 6

À quel taux faut-il placer par capitalisation 3 000 € pour obtenir 3 121,20 € après 2 ans ?

Exercice 7

À quel taux faut-il placer par capitalisation 10 000 € pour obtenir 13 022,60 € après 6 ans ?

Exercice 8

J'ai prêté 2 000 € à un taux annuel de 3 %. La personne m'a remboursé 2 459,75 € au total. Pendant combien de temps m'a-t-il emprunté les 2 000 € ?

Exercice 9

Je viens de rembourser la somme de 689 626,29 € suite à un emprunt de 350 000 € à un taux de 2,75 % l'an. Quel fut la durée de mon emprunt ?

Exercice 10

Pendant combien de temps ai-je emprunté la somme de 12 000 € au taux annuel de 1,21 % si je dois rembourser aujourd'hui la somme de 13 863,16 € ?

Exercice 11

J'ai placé, il y a quelques années déjà, la somme de 25 000 € sur un compte au nom de mon fils, le jour de son anniversaire. Aujourd'hui, il a 25 ans et décide de vider son compte. La banque lui donne la somme de 39 335,26 €. Sachant que le taux d'intérêt annuel a été de 2,55 % tout au long de la période, quel âge avait mon fils quand j'ai placé l'argent sur son compte ?

Exercice 12

À quel taux dois-je placer un certain capital C pour qu'il double de valeur au bout de 13 ans ?

Exercice 13

À quel taux dois-je placer un certain capital C pour qu'il triple de valeur au bout de 20 ans ?

Exercice 14

Est-il possible qu'une somme d'argent, placée sur un compte d'épargne, puisse fructifier de telle manière que sa valeur triple en seulement 5 ans ? Justifier.

Exercice 15

Lorsque je prendrai ma pension dans 40 ans, je souhaiterais avoir à ma disposition une somme de 50 000 €, après prélèvement par l'État d'un précompte mobilier de 20 %. Quelle somme dois-je placer sur mon compte, aujourd'hui, à intérêts composés et au taux annuel de 2 %, pour obtenir ce montant ?

Différents types de croissance

6.1 Croissance liée aux types d'intérêts

Rappelons-nous ce qui a été vu au chapitre précédent. Nous allons réaliser le graphique montrant la différence de croissance entre les intérêts simples et les intérêts composés.

6.1.1 Activité – Graphique

Un capital de 100 000 € est placé au taux annuel de 5 %. Établir le graphique de la valeur acquise en fonction du nombre d'années n si :

- a) l'intérêt est simple
- b) l'intérêt est composé

Les calculs et graphique sont à réaliser pages suivantes.

Rappel des formules du calcul de la valeur acquise :

Intérêts simples

$$A = C \cdot (1 + t \cdot n)$$

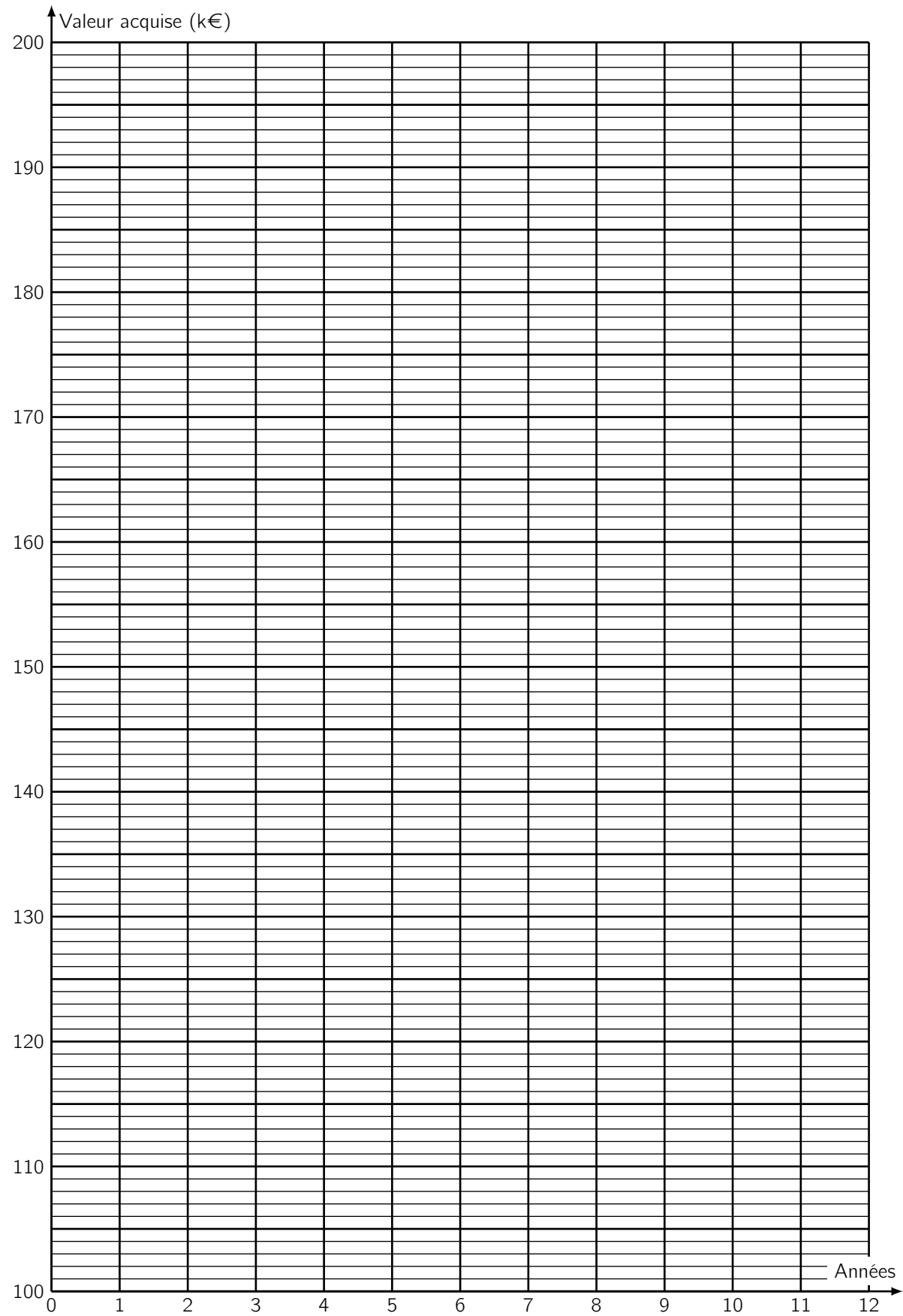
Intérêts composés

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

Compléter le tableau :

n	Calcul pour des intérêts simples : Valeur acquise	Calcul pour des intérêts composés : Valeur acquise
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Réaliser le graphe :



6.2 Exercices

Dans les exercices qui suivent, les graphes sont à réaliser sur une feuille séparée.

Exercice 1

Tracer le graphe de l'évolution de l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté.

Exercice 2

Sachant qu'une population de bactéries double toutes des 20 minutes, tracer le graphe de la croissance d'une population initiale de 1 000 bactéries au cours des 10 premières heures.

Exercice 3

Le carbone 14 (^{14}C) est un isotope radioactif du carbone. Il a une demi-vie de 5 700 ans, ce qui signifie que tous les 5 700 ans la moitié de sa masse s'est transformée (et n'est donc plus mesurable). Ces caractéristiques vont permettre de déterminer, approximativement, l'âge d'un échantillon.

Représenter graphiquement l'évolution de 0,15 mg de carbone 14 durant une période d'environ 86 000 ans.

Exercice 4

Si je donne 250 mg d'ampicilline^a à un patient, il va s'infiltrer dans le réseau sanguin puis sera filtré par les reins et le foie. On estime que chez un adulte, 40 % de l'antibiotique est éliminé chaque heure.

Représenter graphiquement l'évolution de la quantité d'antibiotique restant dans le corps du patient au cours d'une journée de 24 heures.

a. L'ampicilline est un antibiotique à large spectre découvert en 1961 et utilisé dans le traitement d'infections bactériennes.

UAA 4

Probabilité

Chapitre 1

Bref historique

Les archéologues ont montré que les jeux de hasard étaient déjà pratiqués dans de nombreuses sociétés antiques. Parmi les ancêtres des jeux de hasard, les jeux de dés occupent une place très importante.

Ceux-ci sont également à l'origine de certains mots actuels :

- * « hasard » vient de l'arabe « az-zahr » (dé à jouer) ;
- * « aléa » vient du latin « alea » (jeu de dés) ;
- * « chance » vient du latin « cadere » (tomber).

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'œuvre de Jérôme Cardan⁽¹⁾. Un problème qui intéressait Cardan était le suivant : « Comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? ».

Le même problème fut posé en 1654 à Blaise Pascal⁽²⁾ par son ami le Chevalier de Méré⁽³⁾ : « Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent. Mais comment doit-on répartir les mises ? »

C'est donc en cherchant à résoudre ces problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.

On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser⁽⁴⁾. On savait aussi que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient

(1). Jérôme Cardan (1501-1576) est un mathématicien, philosophe, astrologue, inventeur et médecin italien.

(2). Blaise Pascal (1623-1662) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français.

(3). Antoine Gombaud, dit le « Chevalier de Méré » (1607-1684), est un écrivain français.

(4). Cf. chapitre suivant.

connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six.

Au xix^{e} siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances.

Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.

C'est Pierre-Simon de Laplace⁽⁵⁾ qui s'en charge dans son ouvrage *Théorie analytique des probabilités*, paru en 1812 : « La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »

Il fallut attendre le début du xx^{e} siècle pour lancer des fondements mathématiques solides à la théorie des probabilités avec Henri Poincaré⁽⁶⁾ mais surtout Kolmogorov⁽⁷⁾.

Aujourd'hui, la recherche en probabilité est très active et de nombreux résultats sont publiés chaque année. L'utilisation des outils probabilistes et statistiques dans un grand nombre de domaines tels que la génétique, la psychologie, la médecine, la physique des particules, l'économie, les assurances,... témoigne de l'efficacité et de l'importance de ces disciplines.

(5). Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.

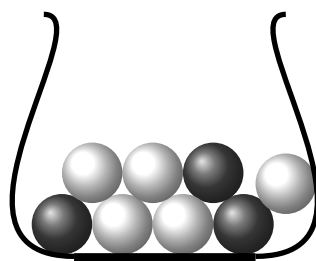
(6). Henri Poincaré (1854-1912) est un mathématicien, physicien théoricien et philosophe des sciences français.

(7). Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903-1987) est un mathématicien russe et soviétique qui a apporté des contributions significatives en mathématiques, notamment en théorie des probabilités.

Chapitre 2

Préambules

Prenons une urne dans laquelle nous y avons placé 5 billes blanches et 3 billes noires⁽¹⁾.



Si je tire une bille au hasard de l'urne, trois raisonnements possibles, mais pas nécessairement corrects, existent afin d'en déterminer des probabilités.

- * **Raisonnement 1** : Il y a deux possibilités (bille blanche ou bille noire), j'ai donc une chance sur deux que la bille soit blanche et une chance sur deux également qu'elle soit noire. Ce raisonnement est faux car il y a plus de billes blanches que de billes noires ; on n'a donc pas les mêmes chances.
- * **Raisonnement 2** : J'ai une chance sur cinq de tirer une bille blanche (car il y en a 5) et une chance sur trois de tirer une bille noire (car il y en a 3). Les probabilités sont donc de $1/5$ pour « bille blanche » et $1/3$ pour « bille noire ». Ce raisonnement est également faux car $1/5 = 0,2$ et $1/3 = 0,3$; la probabilité de tirer une bille blanche serait inférieure à celle de tirer une bille noire. C'est étonnant puisqu'il y a plus de billes blanches que de billes noires...

(1). Idée inspirée de *Maths 3^e – Prépa brevet Cours & entraînement : Cours, méthodes et exercices brevet*, Josep Cesaro, C.M. Chiocca, Jean-Pierre Gerbal, Noël Laverny, Catherine Schuwer, René Veillet, Éditions Hatier, Paris, Mai 2012.

* **Raisonnement 3** : Il y a cinq billes blanches dans l'urne, donc cinq chances que la bille tirée soit blanche. La probabilité d'obtenir une bille blanche est donc de 5. De même, comme il y a trois billes noires dans l'urne, il y a donc trois chances que la bille tirée soit noire. La probabilité d'obtenir une bille noire est donc de 3. Ce raisonnement est correct mais il est incomplet car il faut relativiser les chances en tenant compte du nombre total de billes présentes dans l'urne. On le comprend aisément... De plus, nous verrons d'ici peu qu'une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, donc 5 et 3 ne sont pas des probabilités.

2.1 Exemple – Dé à 6 faces

Partons d'un exemple pour introduire la notion de probabilité : le dé à six faces. On lance vingt fois un dé en notant chaque fois les points figurant sur la face supérieure.

3	3	2	5	1	6	5	1	4	6
6	5	6	1	5	2	3	5	4	1

À partir de maintenant on va s'intéresser à la valeur « 5 » (on aurait pu choisir un autre nombre), et on en réalise un premier tableau recensé.

Dans ce tableau y seront indiqués le numéro du lancer, le nombre de fois que la valeur « 5 » est apparue depuis le début de l'expérience ainsi que sa fréquence.

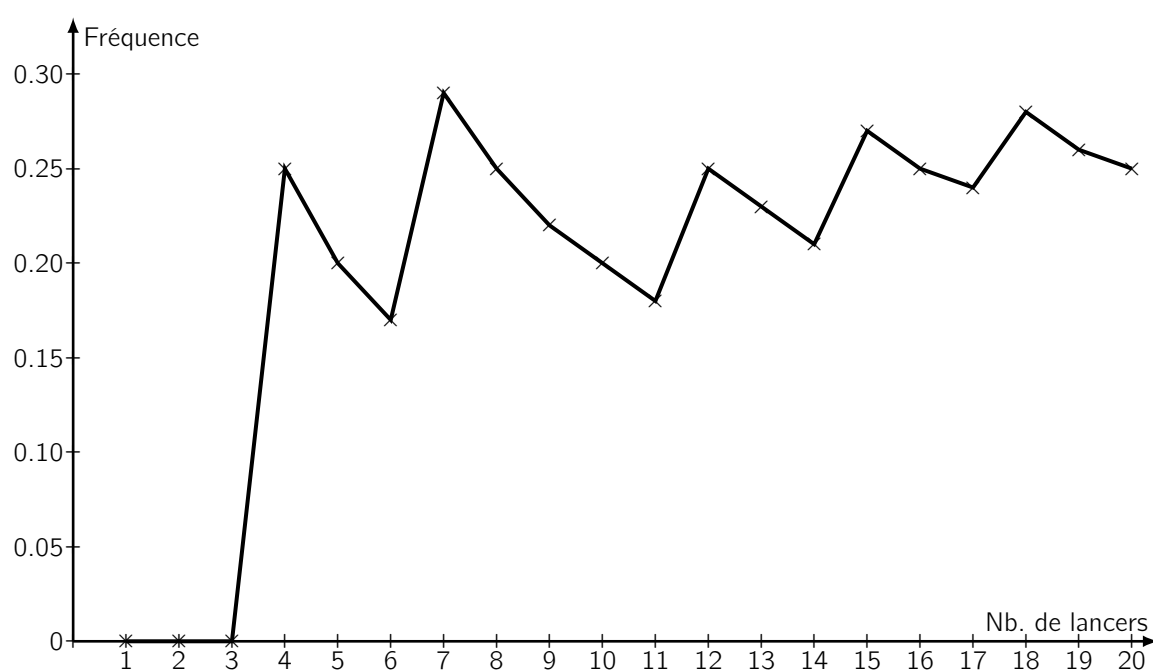
Celle-ci est calculée en faisant le rapport entre le nombre de fois que la valeur « 5 » est apparu et le nombre de lancers.

Tableau recensé :

Nb. de lancers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nb. de 5	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
Fréquence	0	0	0	0.25	0.2	0.17	0.29	0.25	0.22	0.2

Nb. de lancers	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nb. de 5	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
Fréquence	0.18	0.25	0.23	0.21	0.27	0.25	0.24	0.28	0.26	0.25

On réalise le graphe des fréquences correspondant :

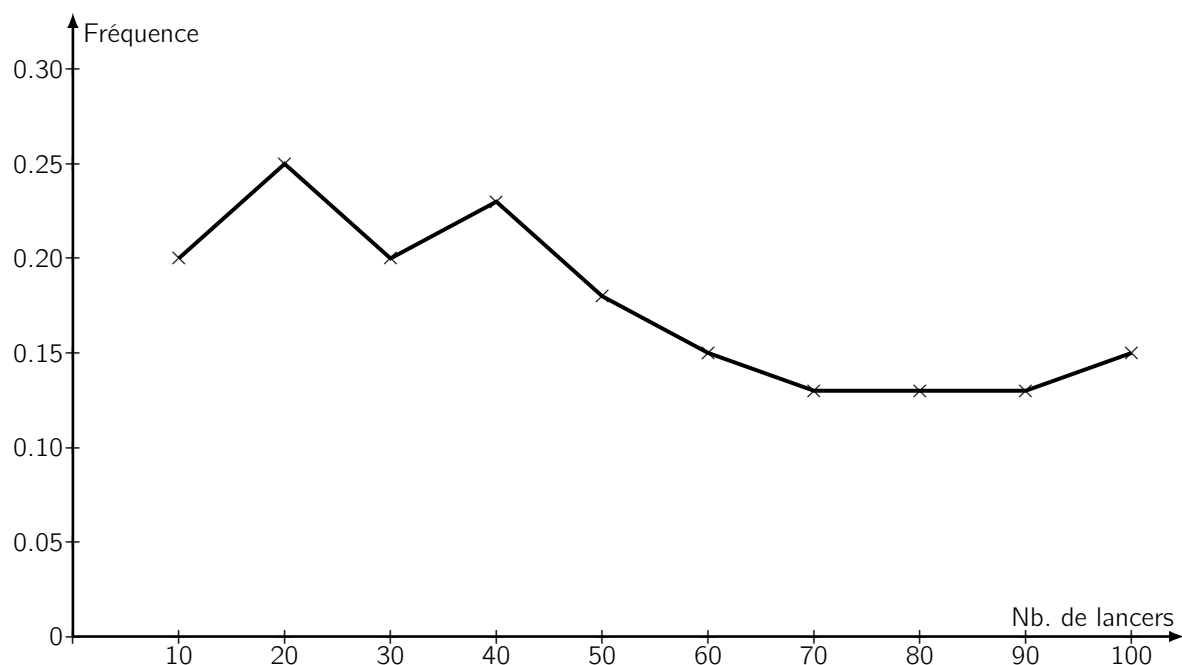


Il existe de très grandes variations au niveau de la fréquence. Est-ce normal ? Poursuivons l'expérience pour le savoir...

On lance à nouveau le dé 80 fois (pourquoi ?) et on en réalise un deuxième tableau :

Nb. lancers	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Nb. de 5	2	5	6	9	9	9	9	10	12	15
Fréquence	0.2	0.25	0.2	0.23	0.18	0.15	0.13	0.13	0.13	0.15

On réalise à nouveau le graphe des fréquences correspondant :



Les constatations que l'on en tire nous amènent à poursuivre l'expérience.

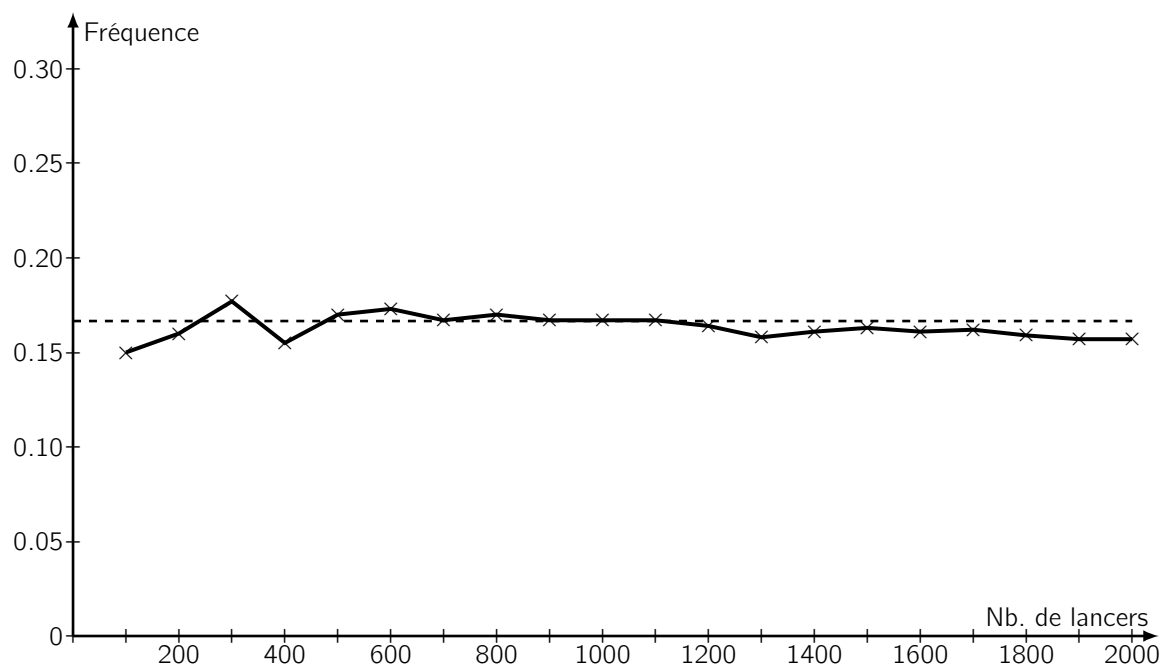
On relance donc le dé (1900 fois, cette fois-ci) et on en réalise un dernier tableau :

Nb. lancers	100	200	300	400	500	600	700
Nb. de 5	15	32	53	62	85	104	117
Fréquence	0.15	0.16	0.177	0.155	0.17	0.173	0.167

Nb. lancers	800	900	1000	1100	1200	1300	1400
Nb. de 5	136	150	167	184	197	205	226
Fréquence	0.17	0.167	0.167	0.167	0.164	0.158	0.161

Nb. lancers	1500	1600	1700	1800	1900	2000	—
Nb. de 5	244	258	275	286	298	314	—
Fréquence	0.163	0.161	0.162	0.159	0.157	0.157	—

On réalise un dernier graphe des fréquences correspondant :



2.2 Conclusion

Lorsque le nombre de lancers devient grand, on observe une stabilisation de la fréquence autour de $0,16666\dots (= 1/6)$. Ce nombre est appelé *probabilité d'obtenir un « 5 »*.

2.3 Remarques importantes

1. La **fréquence** est une notion de statistique descriptive. Elle décrit les résultats expérimentaux une fois l'expérience réalisée.
2. La **probabilité** est une notion théorique. Elle permet, avant de réaliser l'expérience, d'avoir une idée du nombre de chances qu'un événement bien déterminé se produise.

Une fois de plus, afin de comprendre plus aisément la suite de ce cours, il est important de connaître un certain nombre de termes, de notions.

3.1 Expérience aléatoire

Commençons par l'**expérience aléatoire**. Il s'agit d'une expérience dont on ne peut pas prédire exactement le résultat, du fait que l'on ne contrôle pas entièrement toutes les causes qui influencent ce résultat.

3.1.1 Exemples

1. On lance une fois un dé et on note le point obtenu.
2. On joue à pile ou face avec une pièce de monnaie.
3. On joue deux fois à pile ou face avec la même pièce en notant les résultats obtenus.
4. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

3.2 Ensemble fondamental

Autre notion importante : l'**ensemble fondamental**. On appelle ensemble fondamental l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Cet ensemble est généralement noté Ω (oméga).

3.2.1 Exemples

Se référant aux exemples ci-dessus :

$$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$\Omega_2 = \{P; F\}$$

$$\Omega_3 = \{(P; P); (P; F); (F; P); (F; F)\} \text{ ou } \Omega_3 = \{PP; PF; FP; FF\}$$

$$\Omega_4 = \{(A; R; D; V; 10; 9; 8; 7)\heartsuit;$$

$$(A; R; D; V; 10; 9; 8; 7)\diamondsuit;$$

$$(A; R; D; V; 10; 9; 8; 7)\clubsuit;$$

$$(A; R; D; V; 10; 9; 8; 7)\spadesuit\}$$

3.3 Événement aléatoire

On en arrive à définir ce qu'est un **événement aléatoire**. Un événement aléatoire est une partie de l'ensemble fondamental.

3.3.1 Exemples

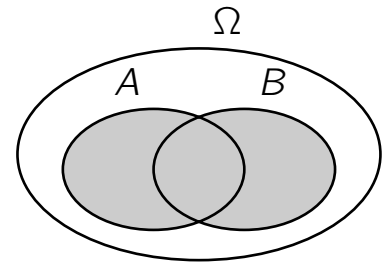
- * Obtenir un nombre strictement supérieur à 4 est un événement noté, par exemple, $A : A = \{5; 6\}$
- * Obtenir deux fois « pile » quand on lance trois fois une pièce de monnaie est un événement J , par exemple : $J = \{PPF; PFP; FPP\}$
- * Tirer un as est un événement qui correspond, par exemple, à l'ensemble $F : F = \{A\heartsuit; A\diamondsuit; A\clubsuit; A\spadesuit\}$

3.3.2 En particulier

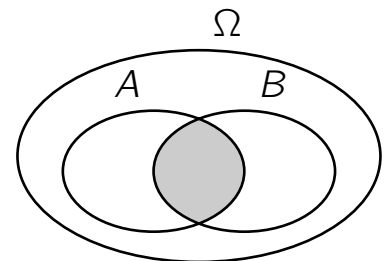
- * La partie $\emptyset$ est appelée **événement impossible**.
- * La partie constituée de Ω entier est appelé **événement certain**.
- * Toute partie constituée d'un seul résultat est appelé **événement élémentaire**.

De plus, on peut combiner des événements pour former de nouveaux événements. Ainsi, si A et B sont deux événements aléatoires :

- $A \cup B$ se produit si et seulement si
 - * l'événement A se produit
 - * **ou** l'événement B se produit
 - * **ou** les événements A et B se produisent

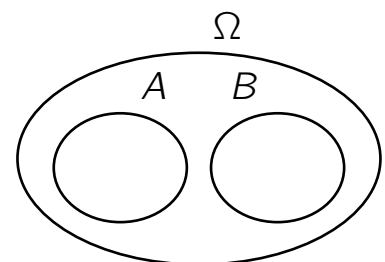


- $A \cap B$ se produit si et seulement si
 - * l'événement A se produit
 - * **et** l'événement B se produit

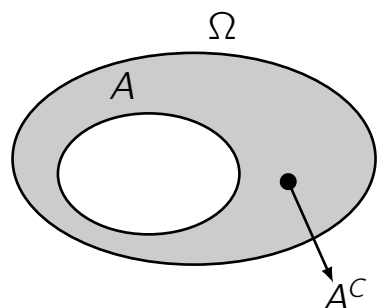


3.3.3 Remarques importantes

- Les événements A et B sont incompatibles si A et B sont disjoints



- A^c se produit si et seulement si
l'événement A ne se produit pas



3.4 Notion de cardinalité

3.4.1 Définition

Un nombre cardinal désigne une quantité. À l'inverse, un nombre ordinal désigne plutôt un ordre, un « rangement ».

Pour un ensemble fini⁽¹⁾, sa cardinalité, qui est une notion intuitive de taille, va indiquer le nombre d'éléments appartenant à cet ensemble. Ce nombre appartient à $\mathbb{N}$.

3.4.2 Exemples

Pour l'ensemble...	Son cardinal est...
$\{4; 9; 11\}$	3
$\{7; 11; 13; 17; 19\}$	5
$\{4; 2; 6; 1\}$	4
$\{(4; 2); (6; 1)\}$	2
$\{\}$ ou $\emptyset$	0

3.4.3 Notation

Dans la littérature, nous pourrions trouver différentes manières de noter le « cardinal » d'un ensemble :

$$\text{Card}(E) = \#E = |E| = \overline{E} = \overline{\overline{E}}$$

Dans la suite du cours, nous utiliserons la notation $\#$ qui semble un bon compromis entre concision d'écriture et clarté du propos.

Ainsi, si l'ensemble B contient les 3 éléments 2, 4 et 7, on notera :

$$B = \{2; 4; 7\} \quad \text{et} \quad \#B = 3$$

(1). Un ensemble A est dit *fini* si l'on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que A contienne exactement n éléments. Dans le cas contraire, l'ensemble est dit *infini*.

3.5 Exercices

Exercice 1

On jette une fois un dé non truqué et on note le point figurant sur la face supérieure.

1. Déterminer l'ensemble fondamental de l'expérience et déterminer $\#\Omega$ ($\#\Omega$ correspond au nombre d'éléments de Ω).
2. Déterminer tous les événements élémentaires, notés $E_1, E_2, \dots$
3. Soient A, B et C les événements suivants :
 A : « obtenir un nombre pair »
 B : « obtenir un nombre impair »
 C : « obtenir un nombre premier »
 - Décrire A, B et C sous forme d'ensemble.
4. Décrire par une phrase $B \cap C, C^c, A \cap B$ et $A \cup C$
5. Décrire par un ensemble $B \cap C, C^c, A \cap B$ et $A \cup C$
6. Lesquels de ces ensembles sont disjoints ? Que peut-on en conclure à propos des événements correspondants ?

Exercice 2

On jette deux dés non truqués et on note les points figurant sur leur face supérieure.

1. Décrire Ω et déterminer $\#\Omega$.
2. Déterminer tous les événements élémentaires, notés $E_1, E_2, \dots$
3. Soient A et B les événements correspondant respectivement à l'apparition de deux points identiques et à l'apparition de deux points dont le point maximum est un 3.
 - Décrire les ensembles $A, B, A \cap B$ et $A \cup B$
 - Déterminer $\#A, \#B, \#(A \cap B)$ et $\#(A \cup B)$

Exercice 3

On tire une carte d'un jeu bien mélangé de 52 cartes.

1. Décrire Ω et déterminer $\#\Omega$.
2. Déterminer tous les événements élémentaires, notés $E_1, E_2, \dots$
3. Soient A et B les événements suivants :
 A : « obtenir une dame »
 B : « obtenir un coeur »
 - Décrire par une phrase les événements $A^C, B^C, A \cap B, A \cup B$ et $A \cap B^C$
 - Déterminer $\#A, \#B, \#A^C, \#B^C, \#(A \cap B), \#(A \cup B)$ et $\#(A \cap B^C)$
4. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Justifier la réponse.
5. Déterminer un événement C incompatible avec l'événement B .

Définitions et propriétés de la probabilité

4.1 Première définition

On considère une expérience aléatoire que l'on peut répéter autant de fois que l'on veut et on s'intéresse alors à la fréquence d'un certain événement A . On admet aisément, comme il a été vu dans l'introduction (Cf. p.73), que lorsque le nombre de répétitions de l'expérience devient très grand, les fluctuations de la fréquence deviennent très petites.

On obtient finalement une stabilisation de la fréquence : il y a une tendance de plus en plus nette pour la fréquence à ne plus guère s'écarter d'une certaine valeur.

Cette valeur sera appelée *probabilité de l'événement aléatoire A* .

Il est évident que cette définition est difficile à utiliser, puisqu'il faut réaliser un très grand nombre de fois une expérience avant de pouvoir déterminer une probabilité...

Envisageons donc une autre définition.

4.2 Seconde définition

4.2.1 Axiomes de Kolmogorov

En 1933, Andreï Kolmogorov ⁽¹⁾ définit la probabilité comme étant une fonction réelle de l'ensemble des événements dans $\mathbb{R}$ et qui obéit à trois axiomes ⁽²⁾ :

1. $\forall$ événement A , on a $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si A et B sont deux événements disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4.2.2 Propriétés

Se basant sur ces axiomes, on en déduit aisément quelques propriétés :

1. $\forall$ événement A , on a : $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $\forall$ événement A , on a bien évidemment que :
 $A \cup A^C = \Omega$ et $A \cap A^C = \emptyset$

$$\Rightarrow P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A^C)$$

$$1 = P(A) + P(A^C)$$

$$\Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$$

3. $P(\emptyset) = 0$

4. $\forall$ événement A composé des événements élémentaires $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, on a :
 $P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots + P(E_n)$

(1). Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903-1987) est un mathématicien russe et soviétique qui a apporté des contributions significatives en mathématiques, notamment en théorie des probabilités.

(2). Axiome : Proposition considérée comme évidente, admise sans démonstration (dictionnaire Le Robert).

4.3 Exercices

Exercice 1

Trois chevaux A, B et C prennent le départ d'une course.
Le cheval A a deux fois plus de chance de gagner que le B et le B a deux fois plus de chance que le C.
Quelles sont les probabilités de gagner pour chacun ?

Exercice 2

Quatre personnes A, B, C et D organisent un jeu entre elles où il n'y a qu'un gagnant possible.
Sachant que

A a quatre fois plus de chance de gagner que C

B a trois fois plus de chance de gagner que C

D a la même chance de gagner que B,

quelle est la probabilité que D ne gagne pas ?

Exercice 3

Un groupe de 7 amis (3 garçons et 4 filles) décide de participer aux « 20 km de Bruxelles ». Par facilité, on les notera A, B et C pour les garçons et D, E, F et G pour les filles.
Sachant que

A a trois fois plus de chance de gagner que C

F a quatre fois plus de chance de gagner que C

E a quatre fois plus de chance de gagner que F

D n'a que deux chances sur trois de gagner par rapport à A

G n'a qu'une chance sur deux de gagner par rapport à B

B n'a que deux chances sur cinq de gagner par rapport à A,

quelle est la probabilité, pour chacun des garçons, de gagner ?

5.1 Définition

L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se produire.

5.1.1 Exemple – Lancer une pièce de monnaie

Il y a deux événements élémentaires : $\{P\}$ et $\{F\}$.

Si l'on suppose que la pièce utilisée n'est pas truquée, ces deux événements élémentaires sont équiprobables : $P(\{P\}) = P(\{F\})$

En utilisant les axiomes de Kolmogorov (seconde définition), on obtient alors le résultat attendu intuitivement :

$$P(\{P\}) = P(\{F\}) = \frac{1}{2}$$

5.1.2 Exemple – Lancer un dé à 6 faces

Les événements élémentaires sont : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$.

Si le dé n'est pas truqué, ces événements élémentaires sont équiprobables. En utilisant la même démarche que ci-dessus, on obtient :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Soit F l'événement « obtenir un nombre pair » : $F = \{2; 4; 6\}$
alors,

$$\begin{aligned} P(F) &= P(2; 4; 6) \\ &= P(2) + P(4) + P(6) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(F) = \frac{\text{nb. d'éléments de } F}{\text{nb. d'éléments de } \Omega}$$

5.2 Formule de Laplace

En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement quelconque F , notée $P(F)$, est

$$P(F) = \frac{\text{nb. d'éléments de } F}{\text{nb. d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nb. de cas favorables}}{\text{nb. de cas possibles}}$$

Cette formule ⁽¹⁾ peut s'écrire plus simplement :

$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega}$$

(1). Cette formule est attribuée au mathématicien français Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

5.3 Exercices à résoudre par dénombrement

Exercice 1

Dans un jeu télévisé, les participants doivent tirer une boule d'une urne. Cette urne contient dix-sept boules blanches et trois boules noires. Déterminer, lors du premier tirage, la probabilité qu'a un candidat de tirer une boule noire.

Exercice 2

Une urne contient sept boules : une blanche, quatre rouges et deux jaunes. On tire une boule de l'urne. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « la boule tirée est rouge »

B : « la boule tirée est jaune »

C : « la boule tirée est blanche ou rouge »

Exercice 3

On lance un dé non truqué. Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : « le point obtenu est supérieur à 2 »

B : « le point obtenu est un multiple de 3 »

Exercice 4

Dans un jeu de 32 cartes, bien mélangé, on tire une carte. Les événements sont :

A : « la carte est un pique »

B : « la carte est une figure ^a »

- Définir par une phrase A^C , $A \cap B$ et $A \cup B$.
- Puis calculer $P(A)$, $P(A^C)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

a. Dans un jeu de carte traditionnel, il existe trois figures : Roi, Dame et Valet

Exercice 5

On jette deux dés non truqués et on note le couple de points obtenus. Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : « les deux points sont identiques »

B : « le résultat comporte exactement un 3 »

C : « le résultat ne comporte aucun 6 »

D : « la somme des points vaut 10 »

E : « le résultat comporte un 6 ou un 5 »

Exercice 6

On jette trois pièces de monnaie bien équilibrées et on note, dans l'ordre, la succession de « pile P » et de « face F » obtenue. Calculer la probabilité d'obtenir :

- * exactement trois P
- * exactement deux F
- * des résultats alternés
- * au moins un P

5.4 Exercices à résoudre à l'aide d'un diagramme de Venn

Exercice 1

Dans un restaurant, on a constaté que sur 160 clients, pour terminer le repas, 136 clients prennent un dessert, 40 prennent du fromage et 32 prennent à la fois du fromage et un dessert.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. En choisissant un client au hasard, quelle est la probabilité
 - * qu'il ne choisisse ni dessert, ni fromage ?
 - * qu'il choisisse du fromage, mais pas de dessert ?
 - * qu'il choisisse un dessert ou du fromage ou les deux ?

Exercice 2

Dans un lot de 1 100 appareils, on a constaté que 132 appareils présentaient le défaut x (et peut-être aussi le défaut y), 99 appareils présentaient le défaut y (et peut-être aussi le défaut x), et 44 présentaient simultanément les deux défauts.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. On choisit au hasard un appareil parmi les 1 100. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - E : « l'appareil choisi a le défaut x »
 - F : « l'appareil choisi a le défaut y »
 - G : « l'appareil choisi a les deux défauts »
 - H : « l'appareil choisi a uniquement le défaut y »
 - I : « l'appareil choisi a le défaut x ou y »
 - J : « l'appareil choisi n'a pas de défaut »
 - K : « l'appareil choisi n'a pas le défaut y »

Exercice 3

Parmi les 115 personnes faisant partie d'une association sportive, 60 font partie de la section base-ball, 45 font partie de la section équitation et 25 font partie des deux sections.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. On choisit au hasard une personne parmi les 115. Calculer la probabilité que cette personne ne fasse ni du base-ball, ni de l'équitation.

5.5 Exercices à résoudre à l'aide d'un tableau à double entrée

Exercice 1

Une classe comporte 8 garçons parmi lesquels 6 n'ont pas les yeux bleus et 15 filles dont les deux tiers ont les yeux bleus.

1. Représenter cette situation par un tableau à double entrée : sexe, couleur des yeux.
2. On choisit un élève au hasard dans la classe. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « l'élève choisi est un garçon »

B : « l'élève choisi est une fille aux yeux bleus »

C : « l'élève choisi est un garçon qui n'a pas les yeux bleus »

D : « l'élève choisi a les yeux bleus »

Exercice 2

Un sac contient 65 jetons ayant chacun l'une des trois couleurs, rouge, verte ou jaune, et une forme carrée ou bien ronde. On sait que 30 de ces jetons sont jaunes, 40 jetons sont ronds, 11 jetons sont rouges et ronds, 10 jetons sont verts et carrés, 7 jetons sont verts et ronds.

1. Représenter cette situation par un tableau à double entrée : couleur, forme.
2. On choisit un jeton au hasard dans le sac. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le jeton choisi est vert »

B : « le jeton choisi est rond mais pas vert »

C : « le jeton choisi n'est ni rond, ni vert »

Remarque : Chaque probabilité sera donnée sous forme de fraction, puis sous forme décimale arrondie au 100^e.

Exercice 3

Un lycée de 930 élèves regroupe deux types de sections : des sections générales et des sections technologiques.

- 30 % des élèves de l'établissement sont en section technologique ;
- 40 % des élèves de l'établissement sont des garçons ;
- 25 % des élèves garçons sont en section technologique.

1. Présenter les données dans un tableau à double entrée.
2. On interroge au hasard un élève de l'établissement. Tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « cet élève est une fille »

B : « cet élève est un garçon d'une section technologique »

C : « cet élève n'est pas une fille et n'est pas dans une section technologique »

Exercice 4

Dans un village, 1750 habitants sont conviés à répondre à une enquête sur le placement d'une antenne-relais. Quatre-vingts pourcent des habitants ont participé au référendum. Il leur était demandé s'ils étaient *pour* ou *contre* la pose de l'antenne sur le toit de l'école.

- 11 % des habitants sont *contre* ;
- parmi les *contre*, 125 sont situés à 2 km ou moins du site ;
- 90 % des habitants ayant participé sont situés à plus de 2 km du site.

1. Présenter les données dans un tableau à double entrée (avis/distance).
2. On interroge au hasard un habitant à la sortie du référendum. Calculer la probabilité qu'il soit *pour* et qu'il habite à plus de 2 km du site.

Arbres et probabilité conditionnelle

Dans de multiples situations, il est possible de schématiser une expérience aléatoire par un arbre (simple). Dans le cas de la schématisation par un arbre de probabilité, on parlera d'arbre pondéré. L'utilisation de la représentation en arbre permet de modéliser une situation comme nous venons de le dire, mais permet également de déterminer une probabilité dans le cas où l'on étudie plusieurs événements.

Si l'arbre n'est pas pondéré, les événements décrits par une branche sont équiprobables. À l'inverse, s'il existe une pondération, leur probabilité est égale au produit des branches.

Voici deux exemples⁽¹⁾ de situations que l'on peut rencontrer :

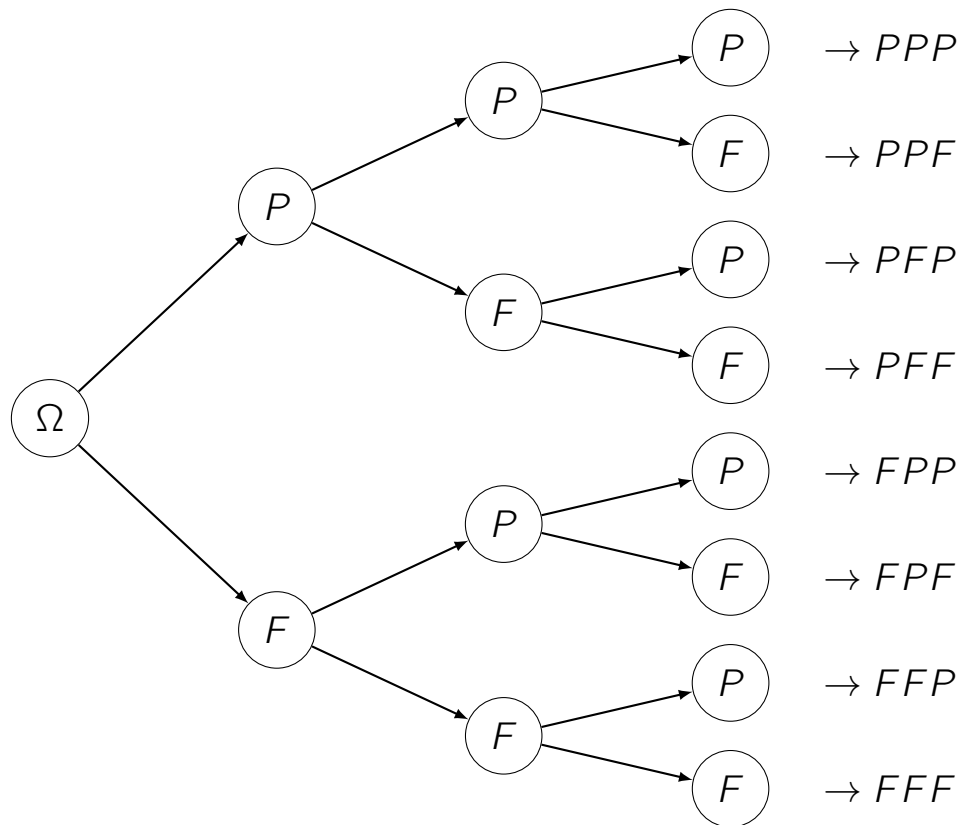
- * Un tiers d'une population est vaccinée contre une maladie. On sait que 10 % des personnes vaccinées développent quand même la maladie. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité pour que celle-ci soit malade et vaccinée ?
- * Un étudiant a une probabilité de $\frac{3}{4}$ d'être présent à la prochaine séance si celle-ci est un cours magistral, et une probabilité de $\frac{9}{10}$ si celle-ci est une séance de travaux dirigés.
Sachant que son emploi du temps est constitué aux deux tiers de cours magistraux, quelle est la probabilité qu'il soit présent à la prochaine séance ?

(1). Extrait du cours de JF Coeurjolly, *Chapitre 3 : Probabilités conditionnelles – Indépendance* (Université Pierre Mendès France, Grenoble, France) https://www-ljk.imag.fr/membres/Jean-Francois.Coeurjolly/documents/L2/CM3_probab_L2.pdf.

6.1 Arbres simples

6.1.1 Exemple – Pièce de monnaie

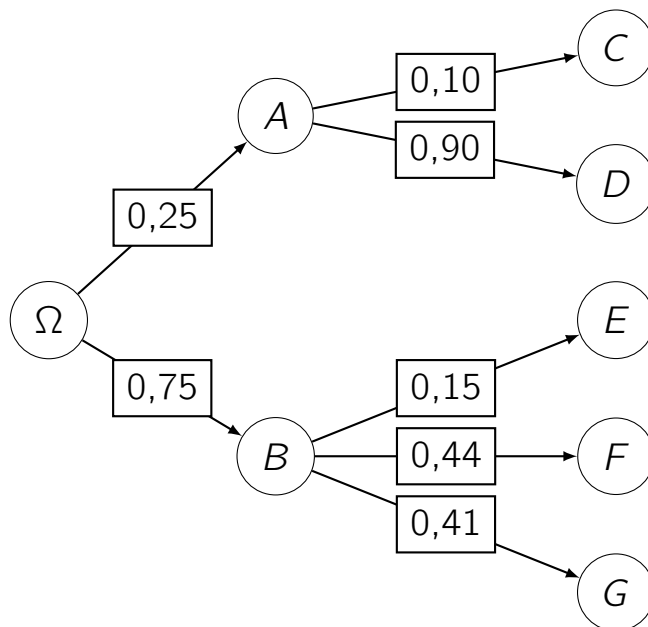
On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée et l'on regarde si l'on a pile (P) ou face (F). On modélise la situation à l'aide d'un arbre.



Question : Quelle est la probabilité d'avoir exactement une fois P ?

6.2 Arbres pondérés

Soit la représentation, sous la forme d'un arbre pondéré, d'une expérience quelconque :



6.2.1 Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
2. La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.
3. La probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à sa réalisation.

6.2.2 Exemple – Pièces défectueuses

Dans un atelier, il y a 2 % de pièces défectueuses. On effectue un test pour savoir si l'on doit accepter ou refuser une pièce. On a observé que :

- * Si la pièce est correcte, elle est acceptée par ce test à 96 %.
- * Si la pièce est défectueuse, elle est refusée par ce test à 97 %.

Soient les événements suivants :

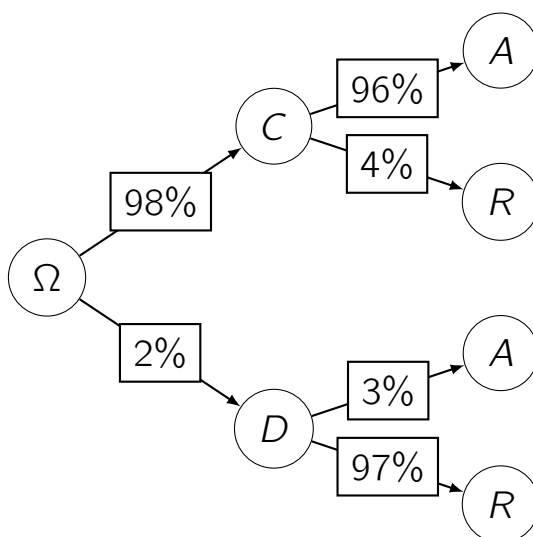
C : « la pièce est correcte »

D : « la pièce est défectueuse »

A : « la pièce est acceptée »

R : « la pièce est refusée »

Construisons l'arbre. Sachant que les événements ne sont pas équiprobables, on construira donc un arbre pondéré.

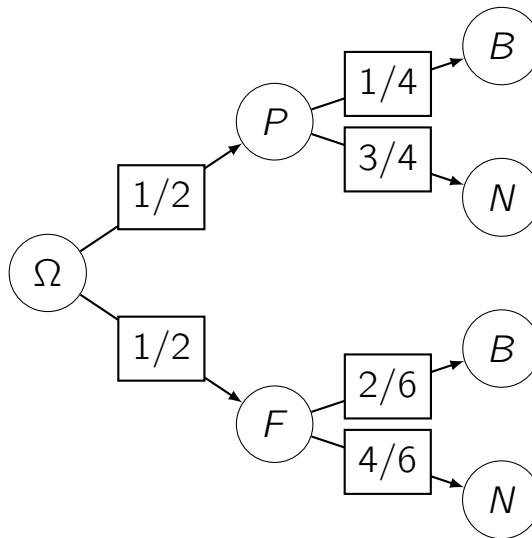


Question : Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée par le test ?

6.2.3 Exemple – Pièce de monnaie et boules

Dans un jeu, on lance une pièce bien équilibrée. Si l'on obtient pile (P), alors on tire une boule dans une urne qui contient une boule blanche et 3 boules noires. Par contre, si l'on obtient face (F), alors on tire une boule d'une urne qui contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

Cette expérience est représentée sur l'arbre pondéré suivant :

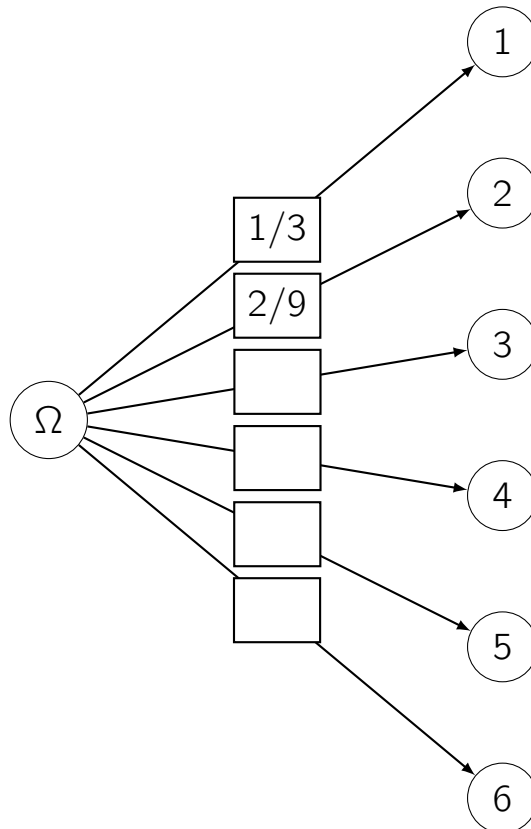


Question : Quelle est la probabilité d'avoir une boule noire si l'on a eu le côté face de la pièce de monnaie auparavant (F ; ●) ?

6.2.4 Exemple – Dé truqué

On lance un dé truqué tel que la probabilité pour qu'il tombe sur 1 est de $1/3$, celle qu'il tombe sur 2 est de $2/9$ tandis que les quatre autres résultats possibles sont équiprobables.

Cette expérience est représentée sur l'arbre pondéré suivant :



Question : Calculer la probabilité que le dé tombe sur un nombre impair.

6.3 Probabilités conditionnelles

6.3.1 Exemple – Bibliothèque

Dans une bibliothèque comportant 150 ouvrages, il y en a 60 qui sont écrits en anglais dont 12 portent sur la psychologie.

Soient les événements suivants :

A : « Le livre est écrit en anglais »

B : « Le livre porte sur la psychologie »

$\Rightarrow A \cap B$: « Le livre est écrit en anglais et porte sur la psychologie »

On a donc :

$$P(A) = \frac{60}{150} \quad P(A \cap B) = \frac{12}{150}$$

Il s'agit de probabilités tout-à-fait traditionnelles. Dans le cas de probabilités conditionnelles, on écrira :

B/A : « Le livre porte sur la psychologie sachant qu'il est écrit en anglais »

$$P(B/A) = \frac{12}{60}$$

Il s'agit en réalité de la fréquence des livres de psychologie parmi les livres en anglais.

On constate les relations suivantes :

$$P(B/A) = \frac{12}{60} = \frac{\frac{12}{150}}{\frac{60}{150}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donc :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

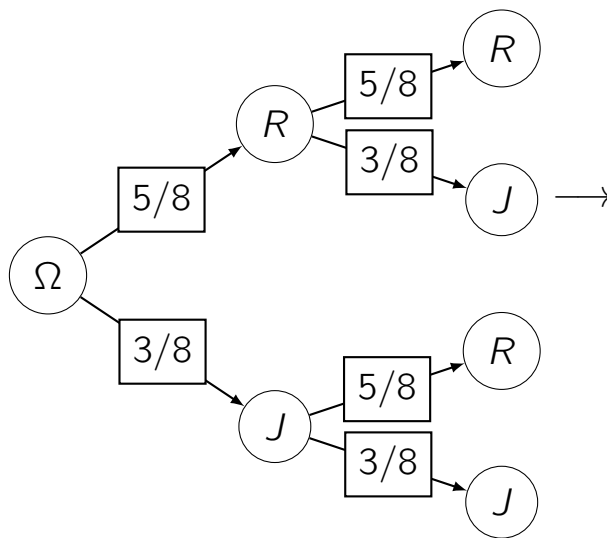
Ou encore :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

6.3.2 Exemple – Urne et boules

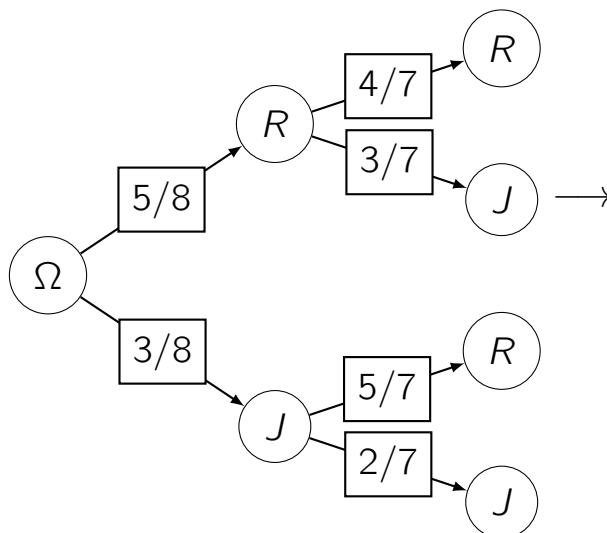
Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules jaunes. On tire successivement deux boules au hasard.

- Calculer la probabilité de tirer, dans l'ordre, une boule rouge et une boule jaune si le tirage se fait avec remise. Pour ce faire, représentons d'abord la situation avec un arbre :



$$P(R; J) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$$

- Calculer la probabilité de tirer, dans l'ordre, une boule rouge et une boule jaune si le tirage se fait maintenant sans remise. Représentons cette situation par un arbre :



$$P(R; J) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

6.4 Exercices à résoudre à l'aide d'un arbre

Remarque préliminaire : toutes les réponses seront données sous la forme décimale et arrondies au 1 000^e.

Exercice 1

En Belgique (en 2021), la probabilité qu'à la naissance un enfant soit un garçon est de 0,5112. Calculer la probabilité que, dans une famille de deux enfants :

- a) les deux enfants sont des filles.
- b) le premier enfant est une fille et le second un garçon.

Exercice 2

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules jaunes. On tire successivement deux boules, avec remise. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « une boule est rouge, l'autre jaune »
- B : « les boules sont de couleurs différentes »

Exercice 3

Un sac contient 4 billes jaunes, 2 bleues et 3 vertes. On tire successivement, et sans remise, deux billes. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « les deux billes sont jaunes »
- B : « une bille est bleue et l'autre verte »
- C : « les deux billes sont de couleurs différentes »

Exercice 4

Lors d'un match de tennis, un entraîneur a calculé que son joueur avait une probabilité de 0,65 de réussir son premier service et 80 % de chance de réussir le second.

Calculer la probabilité que le joueur effectue une double faute.

Exercice 5

Considérons trois urnes numérotées de 1 à 3.

L'urne 1 contient trois boules noires et trois boules blanches.

L'urne 2 contient trois boules blanches et deux boules vertes.

L'urne 3 contient trois boules rouges, une boule noire et neuf boules blanches.

L'expérience consiste à piocher une boule au hasard dans l'urne 1, puis dans l'urne 2, etc. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « les trois boules ont la même couleur »

B : « deux boules ont la même couleur »